ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 1–11
https://doi.org/10.32817/amssd.5.1

Zaprimljen: 10. listopada 2022.
Prihvaćen: 7. studenog 2022

O jednom zadatku s državne mature – problem optimizacije površine trokuta

Mandi Orlić Bachler, Bojan Kovačić, Ema Gukov

Sažetak

U članku se najprije izlažu dva različita načina rješavanja (primjenom diferencijalnoga računa i bez nje) poopćenja zadatka postavljenoga na višoj razini matematike na državnoj maturi u kolovozu 2022.:

Pravac prolazi točkom $T\,(x_T > 0, y_T > 0)$ i s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi određuje trokut optimalne površine. Kolika je mjera kuta kojega taj pravac zatvara s osi ordinata?

Opisuje se i konstrukcija pravca iz zadatka. Potom se analizira postojanje optimalne površine u slučaju slabijega zahtjeva da pravac siječe obje koordinatne osi. Zaključno se navode i komentiraju neke varijante zadatka u kojima se točka T nalazi u nekom od preostalih triju kvadranata pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.

Ključni pojmovi: pravac, površina trokuta, optimizacija

1. Uvod

Na ispitu iz matematike (viša razina) na državnoj maturi nerijetko se pojavljuju i zadaci s ekstremalnim zadaćama u geometriji. U ovom ćemo članku analizirati jedan takav zadatak zadan u kolovozu 2022., kao i neke njegove varijante.

Na početku podsjetimo na definiciju segmentnoga oblika jednadžbe pravca u ravnini.

Definicija 1. *Neka su $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Neka je p pravac koji siječe os apscisa u točki $S(m, 0)$, a os ordinata u točki $S(0, n)$ Tada je segmentni oblik jednadžbe toga pravca*

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1\,. \tag{1}$$

Spomenimo da studenti često interpretiraju brojeve m i n kao duljine odsječaka pravca p na koordinatnim osima. Ta je interpretacija točna ako i samo ako su $m, n > 0$.

Iskažimo i tvrdnju koju ćemo koristiti u nastavku teksta.

Tvrdnja 2. *Neka su $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Neka je p pravac zadan jednadžbom (1). Tada je površina trokuta kojega taj pravac zatvara s objema koordinatnim osima jednaka*

$$P = \frac{|m| \cdot |n|}{2} = \frac{|m \cdot n|}{2} \text{ (kv. jed.)} \tag{2}$$

Dokaz. Prepuštamo ga čitatelju. □

I ovdje treba istaknuti da su studenti često „skloni" primijeniti formulu (2) bez korištenja apsolutne vrijednosti. To je izravna posljedica ranije spomenute interpretacije brojeva m i n kao duljina odsječaka pravca na koordinatnim osima. Zbog toga se na nastavi dodatno napominje da se apsolutna vrijednost u (2) smije izostaviti ako i samo ako su $m, n > 0$.

2. Osnovni zadatak

Na ispitu iz matematike (viša razina) na državnoj maturi održanoj u kolovozu 2022. godine postavljen je sljedeći zadatak (vidjeti [1]).

Zadatak 1. *Pravac prolazi točkom $T(8, 16)$ i s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi određuje trokut maksimalne površine. Kolika je mjera kuta kojega taj pravac zatvara s osi ordinata?*

Mi ćemo riješiti i analizirati malo općenitiji zadatak.

Zadatak 2. *Neka su $x_T, y_T > 0$ proizvoljni, ali fiksirani. Pravac p prolazi točkom $T(x_T, y_T)$ i s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi određuje trokut optimalne površine. Kolika je mjera kuta kojega taj pravac zatvara s osi ordinata?*

Najprije istaknimo da pod pojmom „optimalna površina" zajednički podrazumijevamo najmanju i najveću moguću površinu. To činimo zato što obje površine (ako postoje) određujemo na isti način. Intuitivno možemo zaključiti da ne postoji trokut sa svojstvima iz zadatka, a čija bi površina bila najveća moguća. Naime, što je pravac p „bliži” pravcu $p_1 \ldots x = x_T$ ili $p_2 \ldots y = y_T$, to je površina trokuta kojega p zatvara s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi sve veća. Označimo li s P površinu trokuta kojega pravac p zatvara s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi, onda vrijedi:

$$\lim_{p \to p_1} P = \lim_{p \to p_2} P = +\infty \, .$$

Međutim, ne možemo izvesti analogan zaključak za trokut sa svojstvima iz zadatka, a čija je površina bila najmanja moguća. Naime, ta je površina sve manja što je pravac p „bliže” ishodištu O, tj. vrijedi:

$$\lim_{d(O,p) \to 0} P = 0 \, .$$

Uvjet $d\,(p, 0) \to 0$ i pretpostavka da je T u prvom kvadrantu povlače da p nužno siječe negativni dio jedne od koordinatnih osi. To je suprotno zahtjevu zadatka da p siječe pozitivne dijelove obiju koordinatnih osi. Dakle, ako optimalna površina uopće postoji, onda ona nužno mora biti minimalna.

Pokazat ćemo da zadatak 2. ima jedinstveno rješenje. To ćemo učiniti na dva različita načina. U prvom načinu zadatak ćemo riješiti „elementarno” (uz korištenje graničnih vrijednosti, ali bez korištenja derivacija), dok ćemo u drugom načinu primijeniti derivacije (za teorijske detalje vidjeti [2]–[4]).

Prvo rješenje. Neka je jednadžba pravca p zadana u obliku (2). Budući da p siječe pozitivne dijelove obiju koordinatnih osi, zaključujemo da su $m, n > 0$. Nadalje, točka T pripada pravcu p, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu (2). Dakle, vrijedi:

$$\frac{x_T}{m} + \frac{y_T}{n} = 1 \, .$$

Već smo istaknuli da u slučaju kad su $m, n > 0$ u (2) smijemo izostaviti apsolutnu vrijednost. Zbog toga je površina trokuta kojega p zatvara s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi jednaka

$$P = \frac{m \cdot n}{2} \text{ (kv. jed.)} \, .$$

Tako smo dobili sljedeći matematički model:

$$\begin{aligned} \text{optimizirati} \quad & P = P\,(m, n) = \frac{m \cdot n}{2} \\ \text{uz uvjete} \quad & \frac{x_T}{m} + \frac{y_T}{n} = 1 \, , \\ & m, n > 0 \, . \end{aligned} \tag{3}$$

Označimo:
$$a := \frac{x_T}{m}\,, \quad b := \frac{y_T}{m}\,. \tag{4}$$
Iz (4) slijedi
$$m = \frac{x_T}{a}\,, \quad n = \frac{y_T}{b}\,, \tag{5}$$
pa se (3) svodi na
$$\begin{aligned} \text{optimizirati} \quad & P\,(a,b) = \frac{x_T \cdot y_T}{2} \cdot \frac{1}{a \cdot b} \\ \text{uz uvjete} \quad & a + b = 1\,, \\ & a, b > 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Prema pretpostavci zadatka, $x_T, y_T > 0$ su konstante. Zbog toga funkcija P ima optimalnu vrijednost ako i samo ako izraz $\frac{1}{a \cdot b}$ ima optimalnu vrijednost. Tako umjesto (6) promatramo model:
$$\begin{aligned} \text{optimizirati} \quad & f_1(a,b) = \frac{1}{a \cdot b} \\ \text{uz uvjete} \quad & a + b = 1\,, \\ & a, b > 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Iz prvog uvjeta slijedi
$$b = 1 - a\,. \tag{8}$$
Budući da mora biti $b > 0$, iz nejednakosti
$$1 - a > 0$$
slijedi $a < 1$. Tako (7) postaje model s jednom nezavisnom realnom varijablom:
$$\begin{aligned} \text{optimizirati} \quad & f_2(a) = \frac{1}{a \cdot (1-a)} = \frac{1}{a - a^2} \\ \text{uz uvjet} \quad & a \in \langle 0, 1\rangle\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Lako se provjeri da vrijedi jednakost
$$a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Iz (10) slijedi da funkcija $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom
$$f_3(a) = a - a^2$$
ima globalni maksimum $\frac{1}{4}$ i postiže ga za $a = \frac{1}{2}$. Budući da je $\frac{1}{2} \in \langle 0, 1\rangle$, isti zaključak vrijedi i za restrikciju funkcije f_3 na interval $\langle 0, 1\rangle$.

Tako zaključujemo da funkcija f_2 iz (9) ima jedinstven globalni minimum $f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

Nadalje, lako vidimo da vrijede jednakosti

$$\lim_{a \to 0^+} f_2(a) = \lim_{a \to 1^-} f_2(a) = +\infty\,,$$

pa zaključujemo da funkcija f_2 nema globalni maksimum.

Tako zaključujemo da funkcije f_1, f_2 i P imaju jedinstveni globalni minimum, ali nemaju globalni maksimum. To znači da postoji jedinstveni trokut kojega p zatvara s pozitivnim dijelovima obiju koordinatnih osi čija je površina najmanja moguća. (Analogan trokut čija je površina najveća moguća ne postoji.) Duljine kateta toga trokuta dobivaju se pomoću (5) i (8) za $a = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} b &= 1 - a = \frac{1}{2}, \\ m &= \frac{x_T}{a} = 2 \cdot x_T, \\ n &= \frac{y_T}{b} = 2 \cdot y_T. \end{aligned}$$

Sada lako slijedi da je tražena mjera kuta kojega p zatvara s osi ordinata jednaka:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{m}{n}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x_T}{y_T}\right) \text{ rad.} \tag{11}$$

Posebno, za $x_T = 8$, $y_T = 16$ (numerički podaci iz zadatka 1.) dobivamo

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.463647609\,\text{rad} \approx 26^\circ 33' 54''.$$

Drugo rješenje. Jednako kao u prvom rješenju dobivamo model (3). Iz prvoga je uvjeta

$$n = \frac{m \cdot y_T}{m - x_T}\,. \tag{12}$$

Budući da su $m, y_T > 0$ brojnik razlomka (12) je strogo pozitivan. Zbog uvjeta $n > 0$, i nazivnik razlomka (12) mora biti strogo pozitivan, što znači da mora vrijediti nejednakost

$$m > x_T > 0\,. \tag{13}$$

Uvrštavanjem (12) u funkciju cilja P, a uz uvažavanje (13), dobivamo sljedeći model:

$$\begin{aligned} &\text{optimizirati} \quad P = P(m) = \frac{y_T}{2} \cdot \frac{m^2}{m - x_T} \\ &\text{uz uvjet} \quad m \in \langle x_T, +\infty\rangle\ . \end{aligned} \tag{14}$$

Uočimo da funkcija cilja P iz (14) ima optimalne vrijednosti ako i samo ako funkcija $g\colon \langle x_T, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$ definirana pravilom

$$g(m) = \frac{m^2}{m - x_T}$$

ima optimalne vrijednosti. Zbog pretpostavke P postiže minimum/maksimum za iste vrijednosti nezavisne varijable m za koje g postiže minimum/maksimum.

Primijetimo da vrijedi:

$$\lim_{m \to +\infty} g(m) = +\infty,$$

pa zaključujemo da g nema globalni maksimum. To znači da ni P nema globalni maksimum.

Ispitajmo ima li g globalni minimum. U tu svrhu odredimo njezinu (prvu) derivaciju:

$$g'(m) = \frac{m \cdot (m - 2 \cdot x_T)}{(m - x_T)^2}\,.$$

Zbog (13) g ima jedinstvenu stacionarnu točku $m = 2 \cdot x_T$. Lako vidimo da vrijede nejednakosti:

$$\begin{aligned} g'(m) &< 0 \quad \forall m \in \langle x_T, 2 \cdot x_T\rangle\,, \\ g'(m) &> 0 \quad \forall m \in \langle 2 \cdot x_T, +\infty\rangle\,. \end{aligned}$$

To znači da g strogo pada na intervalu $\langle x_T, 2 \cdot x_T\rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle 2 \cdot x_T, +\infty\rangle$.

Time smo ispitali monotonost funkcije g na njezinoj domeni. Zaključujemo da g postiže globalni minimum za $m = 2 \cdot x_T$. To znači da i P postiže globalni minimum za $m = 2 \cdot x_T$. Taj je minimum jednak

$$P\left(2 \cdot x_T\right) = 2 \cdot x_T \cdot y_T\,.$$

Tako (ponovno) slijedi da postoji jedinstven trokut kojega p zatvara s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi čija je površina najmanja moguća (i da ne postoji analogan trokut čija je površina najveća moguća).

Uvrštavanjem $m = 2 \cdot x_T$ u (12) dobiva se

$$n = 2 \cdot y_T\,,$$

pa se tražena mjera kuta (ponovno) odredi koristeći (11).

U ovoj točki zaključno navodimo svojevrsnu „grafičku” varijantu zadatka 2., ali bez zahtjeva za određivanje mjere kuta kojega p zatvara s osi ordinata. Ta mjera se odredi potpuno analogno kao u rješenju zadatka 2.

Zadatak 3. *Konstruirajte pravac p koji prolazi zadanom točkom T u prvom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini i s pozitivnim dijelovima obiju koordinatnih osi zatvara trokut najmanje površine.*

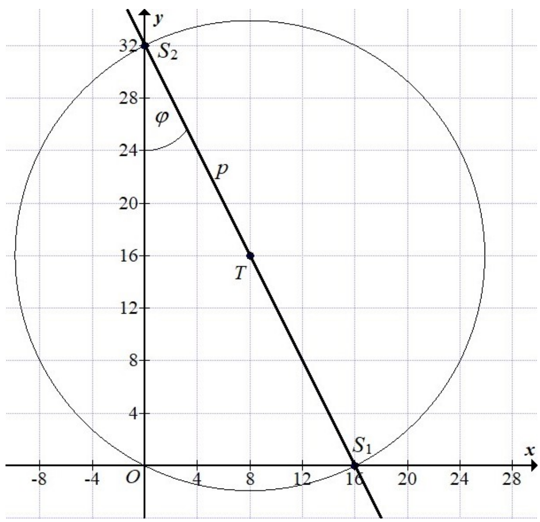
Konstrukcija. Neka je O ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Konstruiramo kružnicu k sa središtem u T i polumjerom $\left|\overline{OT}\right|$. Neka je S sjecište te kružnice s pozitivnim dijelom proizvoljno odabrane koordinatne osi. Pravac ST je traženi pravac.

Dokaz konstrukcije. Pretpostavimo da je $T\left(x_T > 0, y_T > 0\right)$. Tada jednadžba kružnice sa središtem u T i polumjerom $\left|\overline{OT}\right|$ glasi:

$$k \ldots \left(x - x_T\right)^2 + \left(y - y_T\right)^2 = x_T^2 + y_T^2 .$$

Lako se vidi da ta kružnica siječe os apscisa u točkama O i $(2 \cdot x_T, 0)$, a os ordinata u točkama O i $(0, 2 \cdot y_T)$. Sada tvrdnja slijedi izravno iz rješenja zadatka 2.

Konstrukcija pravca p za slučaj naveden u zadatku 1. prikazana je na slici 1.



Slika 1. *Konstrukcija pravca iz zadatka 1.*

3. Neke varijante osnovnoga zadatka

U ovoj ćemo točki analizirati neke varijante zadatka 2. u slučaju kad se točka T nalazi u nekom od triju ostalih kvadranata.

Radi potpunosti najprije navedimo sljedeću tvrdnju.

Tvrdnja 3. *Neka su $x_T, y_T > 0$ proizvoljni, ali fiksirani. Pravac p prolazi točkom $T(x_T, y_T)$ i s koordinatnim osima određuje trokut površine $P > 0$. Tada skup svih mogućih površina P nema ni minimalni, ni maksimalni element.*

Dokaz. (Prvi dokaz.)

Ovaj se dokaz temelji na analizi izloženoj neposredno ispred prvoga rješenja zadatka 2. U toj smo analizi zaključili da ne postoji trokut koji ima najveću površinu. Međutim, zbog zahtjeva da p mora sjeći pozitivne dijelove obiju koordinatnih osi, nismo mogli zaključiti da ne postoji trokut koji ima minimalnu površinu. U tvrdnji 3., međutim, toga zahtjeva nema, tj. pretpostavljamo samo da p ne prolazi ishodištem. Tako sada točkom T možemo povući pravac proizvoljno „blizu" ishodištu i dobiti trokut proizvoljno male površine. To znači da skup iz tvrdnje 3. ne sadrži ni minimalni, ni maksimalni element. □

Dokaz. (Drugi dokaz.)

Promotrimo najprije sve pravce koji prolaze točkom T i sijeku pozitivan dio osi apscisa i negativan dio osi ordinata. Tada su $m > 0$ i $n < 0$ pa model analogan modelu (3) glasi:

$$\begin{aligned} &\text{optimizirati} \quad P = P(m,n) = \frac{m \cdot |n|}{2} \\ &\text{uz uvjete} \quad \frac{x_T}{m} + \frac{y_T}{n} = 1\,, \\ &\qquad\qquad\quad m > 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Korištenjem (4), (5) i jednakosti

$$|n| = -n\,, \quad \forall n < 0\,,$$

(15) dalje prelazi u

$$\begin{aligned} &\text{optimizirati} \quad P = P(a,b) = -\frac{1}{2} \cdot x_T \cdot y_T \cdot \frac{1}{a \cdot b} \\ &\text{uz uvjete} \quad a + b = 1\,, \\ &\qquad\qquad\quad a > 0\,, \\ &\qquad\qquad\quad b < 0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

odnosno u

$$\begin{aligned} &\text{optimizirati} \quad P = f_4(a) = \frac{x_T \cdot y_T}{2} \cdot \frac{1}{a^2 - a} \\ &\text{uz uvjet} \quad a > 1\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Nije teško provjeriti da je funkcija f_4 strogo padajuća na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$ i da vrijede jednakosti:

$$\lim_{a\to 1^+} f_4(a) = +\infty\,,$$
$$\lim_{a\to +\infty} f_4(a) = 0\,.$$

Zbog toga modeli (15), (16) i (17) nemaju nijedno optimalno rješenje (tj. pripadne funkcije cilja nemaju nijedan globalni ekstrem).

Napomenimo da se model (15) (samo s b kao nezavisnom varijablom) dobije i u slučaju kad se promatraju pravci koji prolaze točkom T i sijeku negativni dio osi apscisa i pozitivan dio osi ordinata. Tako zaključujemo da skup iz tvrdnje 3. nema ni minimalni, ni maksimalni element, što je i trebalo dokazati. $\square$

Dokaz tvrdnje 3. je vrlo koristan ako promatramo točku koja se nalazi u nekom od ostalih triju kvadranata pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, sve pravce koji prolaze tom točkom i skup svih površina trokutova koje ti pravci zatvaraju s objema koordinatnim osima. Argumentacijom potpuno analognom prvom dokazu tvrdnje 3. zaključujemo da u svakom od tih slučajeva vrijedi analogon tvrdnje 3. Ipak, zanimljivije je postaviti pitanje: *Kako treba formulirati analogon zadatka 2. za točku iz drugoga, trećega i četvrtoga kvadranta tako da taj analogon ima rješenje?*

Nije teško vidjeti da te analogone treba formulirati tako da se u svakom od njih koristeći (4) i (5) – kao pripadni matematički model dobije (6). Konkretno, formuliraju se sljedeća tri zadatka.

Zadatak 4. *Točkom T u drugom kvadrantu povučen je pravac p koji s negativnim dijelom osi apscisa i pozitivnim dijelom osi ordinata zatvara trokut optimalne površine. Kolika je mjera kuta kojega taj pravac zatvara s osi ordinata?*

Zadatak 5. *Točkom T u trećem kvadrantu povučen je pravac p koji s negativnim dijelovima koordinatnih osi zatvara trokut optimalne površine. Kolika je mjera kuta kojega taj pravac zatvara s osi ordinata?*

Zadatak 6. *Točkom T u četvrtom kvadrantu povučen je pravac p koji s pozitivnim dijelom osi apscisa i negativnim dijelom osi ordinata zatvara trokut optimalne površine. Kolika je mjera kuta kojega taj pravac zatvara s osi ordinata?*

U svakome od tih triju zadataka zaključuje se da postoji jedinstven trokut koji ima najmanju moguću površinu, da ne postoji nijedan trokut koji ima najveću moguću površinu i da je, uz pretpostavku $T(x_T, y_T)$, tražena mjera jednaka

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{x_T}{y_T}\right|\right) \text{ rad}. \tag{18}$$

Pritom se pravac p koji određuje trokut s najmanjom mogućom površinom konstruira potpuno analogno kao u zadatku 3. Detalje prepuštamo čitatelju kao korisnu vježbu.

4. Zaključak

U članku je na konkretnim primjerima pokazano kako je jedan od relativno složenih zadataka postavljenih na ispitu iz matematike (viša razina) na državnoj maturi moguće poopćiti i – još važnije – analizirati sa što manje korištenja „teškoga" aparata diferencijalnoga računa. Studenti su često skloni primjenjivati diferencijalni račun bez dovoljnoga razmišljanja o algoritmima koje efektivno provode. To se posebno odnosi na problem određivanja globalnih ekstrema derivabilne realne funkcije jedne realne varijable. Te probleme znatan dio studenata rješava algoritmom kojim se određuju lokalni ekstremi derivabilne funkcije, pa naposljetku pogrešno poistovjećuje lokalne i globalne ekstreme te funkcije. Zbog toga autori smatraju da se u nastavi diferencijalnoga računa na našim veleučilištima i visokim školama veća pozornost mora posvetiti matematičkom modeliranju ekstremalnih zadaća, kao i razumijevanju postupaka koji se provode prilikom rješavanja tih modela. Samo na taj način studenti će moći kvalitetno primijeniti naučene matematičke postupke u drugim kolegijima koje slušaju tijekom svojega visokoškolskoga obrazovanja, a kasnije i u svojoj poslovnoj praksi.

Literatura

[1] `https://www.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2022/08/MATA22jesen.zip`

[2] S. Kurepa, Matematička analiza 1: diferenciranje i integriranje, 9. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[3] S. Kurepa, Matematička analiza 2: funkcije jedne varijable, 12. izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[4] S. Suljagić, Matematika I, skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2005.

Mandi Orlić Bachler
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Katedra za matematiku,
10000 Zagreb, Av. V. Holjevca 15, Hrvatska
E-mail adresa: mandi.orlic@tvz.hr

Bojan Kovačić
Tehničko veleuĂŤilište u Zagrebu, Katedra za matematiku,
10000 Zagreb, Konavoska 2, Hrvatska
E-mail adresa: bojan.kovacic@tvz.hr

Ema Gukov
studentica 3. godine preddiplomskog sveučilišnog studija građevinarstva,
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
E-mail adresa: egukov@student.grad.hr