ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 41–57
https://doi.org/10.32817/amssd.5.5

Zaprimljen: 7. siječnja 2022.
Prihvaćen: 28. ožujka 2022.

Prebrajanje razapinjućih stabala grafa

Dorian Kablar, Anamari Nakić

Sažetak

Ovaj se članak bavi tehnikama za prebrojavanje razapinjućih stabala grafa. Predstavljen je Kirchoffov matrični teorem o stablima koji povezuje broj razapinjućih stabala grafa i determinantu matrice čije vrijednosti ovise o grafu. Primjenom teorema izračunat je broj razapinjućih stabala od potpunog grafa K_n, potpunog bipartitnog grafa K_{rs} i grafa kotača W_n.

Ključni pojmovi: graf, razapinjuće stablo, matrični teorem o stablima

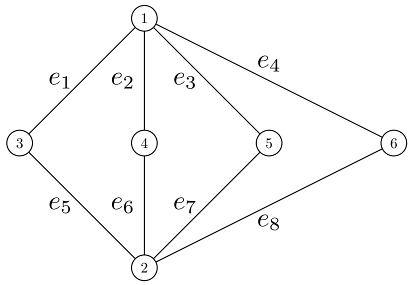
1. Osnovni pojmovi

Jednostavni graf G sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$, čije elemente zovemo **vrhovi** i konačnog skupa $E(G)$ dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje zovemo **bridovi**. U ovom ćemo članku jednostavne grafove kraće nazivati grafovima.

Graf s $n \geq 1$ vrhova, može imati između 0 i $\frac{n(n-1)}{2}$ bridova. Ako su vrhovi v i w spojeni bridom e, kažemo da su vrhovi v i w susjedni. Istovremeno, kažemo da je vrh v incidentan s bridom e. **Stupanj vrha** v grafa G je broj bridova od G koji su incidentni s v, označava se s $\deg(v)$. Vrh stupnja 1 naziva se **list**.

Za bolje razumijevanje ovog članka primjereno je da čitatelj ima predznanje iz linearne algebre i kombinatorike, te da poznaje pojmove binomnog koeficijenta, binomni teorem, matrice, determinante, Laplaceove matrice, singularne matrice, kofaktore, cirkularne matrice te metode rješavanja rekurzija.

Neka je G graf s n vrhova i m bridova. Označimo vrhove grafa G s $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i bridove s $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. **Matrica susjedstva** $A_G = [a_{ij}]$ grafa G je kvadratna matrica reda n čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju vrh v_i s vrhom v_j. **Matrica incidencije** $B_G = [b_{ij}]$ grafa G je matrica reda $n \times m$ čiji je element b_{ij} jednak 1 ako je vrh v_i incidentan s bridom e_j, a 0 inače.



Slika 1. Potpuni bipartitni graf $K_{2,4}$.

Matrica susjedstva i matrica incidencije grafa $K_{2,4}$ su sljedeće:

$$A_{K_{2,4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{K_{2,4}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

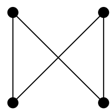
Zanimljivo je primjetiti da je zbroj svih elemenata u pojedinom retku ili stupcu matrice susjedstva A_G jednak stupnju pripadajućeg vrha. U ovom članku s D_G označavat ćemo dijagonalnu matricu koja na i-tom mjestu na dijagonali ima stupanj $\deg(v_i)$. **Laplaceova matrica** ili **Kirchoffova matrica** grafa G je matrica $L_G = D_G - A_G$.

$$D_{K_{2,4}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; L_{K_{2,4}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Laplaceova matrica je simetrična matrica; suma svakog retka i stupca jednaka je 0, stoga je L_G singularna matrica.

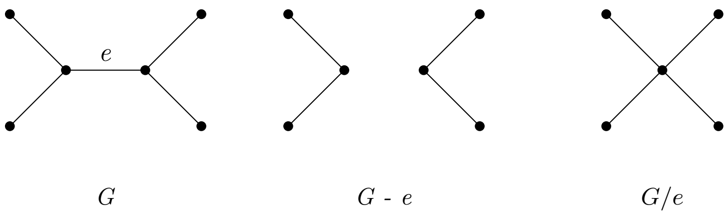
Put u grafu G je konačan niz različitih bridova oblika v_0v_1, $v_1v_2, \ldots,$ $v_{k-1}v_k$ pri čemu su svaka dva uzastopna brida susjedna i svi vrhovi v_0, $v_1, \ldots,$ v_k su različiti. Duljina puta jednaka je broju bridova u putu. Ukoliko je $v_0 = v_k$, zatvoreni put nazivamo **ciklus**. Kažemo da je graf **povezan** ukoliko između svaka dva vrha postoji put.

Podgraf grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$.

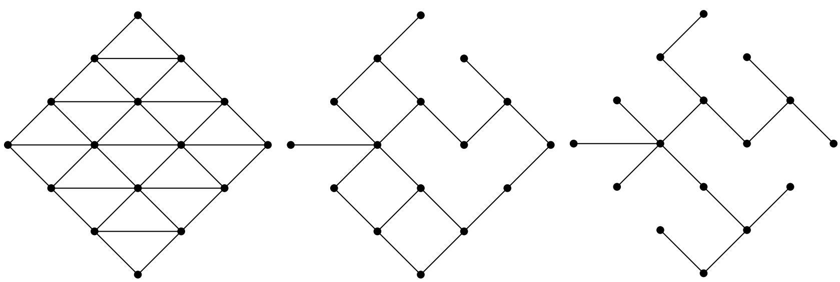


Slika 2. Jedan podgraf od $K_{2,4}$.

Podgrafove možemo konstruirati iz grafa G brisanjem vrhova ili bridova. Ako je e neki brid od G, onda s $G - e$ označavamo graf G bez brida e. Podgraf $G - v$ konstruira se brisanjem vrha v i svih bridova incidentnih s v. S G/e označavamo graf dobiven kontrakcijom brida e, odnosno sljepljivanjem vrhova incidentnih s tim bridom.

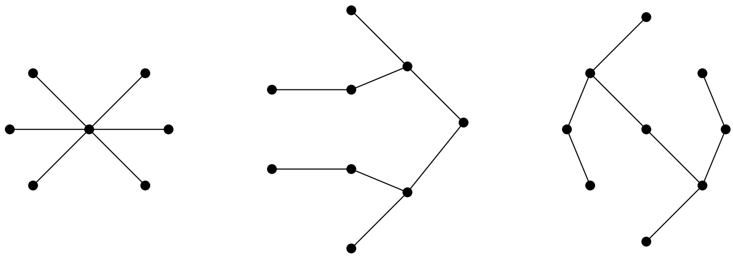


Razapinjući podgraf zadanog grafa $G = (V, E)$ je svaki podgraf $G' = (V, E')$ grafa G s istim skupom vrhova kao i G. Uočimo da razapinjući podgraf zadanog grafa nije jedinstven.



Slika 3. Primjer grafa i njegova dva razapinjuća podgrafa.

U ovom se članku najviše bavimo grafovima stablima. **Stablo** je povezan graf bez ciklusa.



Slika 4. Primjeri grafova stabala.

Lema 1. *Stablo s $n \geq 2$ vrhova ima barem dva lista.*

Dokaz. Konstruiramo put $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k$ maksmimalne duljine u stablu T. Tvrdimo da su v_0 i v_k listovi. U suprotnom, ukoliko jedan od navedenih vrhova nije list, tada se put može produljiti s jednim bridom koji nije dio konstruiranog puta, što je u kontradikciji s maksimalnom duljinom puta. Time je tvrdnja dokazana. □

Teorem 2. *Stablo s n vrhova ima $n-1$ bridova. Povezani graf s n vrhova i $n-1$ bridova je stablo.*

Dokaz. Dokaz da stablo s n vrhova ima $n-1$ bridova provodimo matematičkom indukcijom po broju vrhova n. Ako je $n = 1$, tvrdnja je trivijalno istinita jer nul graf N_1 s jednim vrhom nema bridova. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za stabla s n vrhova. Neka je T stablo s $n+1$ vrhova. Prema lemi 1, T ima list, označimo ga s v, a jedinstveni brid s kojim je incidentan s e. Obrišemo li vrh v i brid e iz T, dobit ćemo novo stablo T'. T' ima n vrhova, te prema pretpostavci ima $n-1$ bridova. Stoga T ima $n-1+1 = n$ bridova, i tvrdnja slijedi.

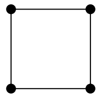
Pokažimo sada da je svaki povezan graf s n vrhova i $n-1$ bridova stablo. Pretpostavimo suprotno, neka je G graf s navedenim svojstvima koji nije stablo. Tada G sadrži ciklus. Neka je e brid u ciklusu. Tada je graf $G - e$ i dalje povezan. Uzastopnim uklanjanjem bridova iz ciklusa od G dobit ćemo povezan graf G' bez ciklusa. G' je stablo s $n-1-k$ bridova, $k > 1$, što je u kontradikciji s prvim dijelom teorema. □

2. Prebrojavanje razapinjućih stabala grafa

Prebrojavanje svih razapinjućih podgrafova zadanog grafa G s n vrhova i m bridova nije težak problem. Uočimo da razapinjućih podgrafova s t bridova, $0 \leq t \leq m$, ima $\binom{m}{t}$, stoga je, prema binomnoj formuli, ukupan broj razapinjućih podgrafova od G jednak:

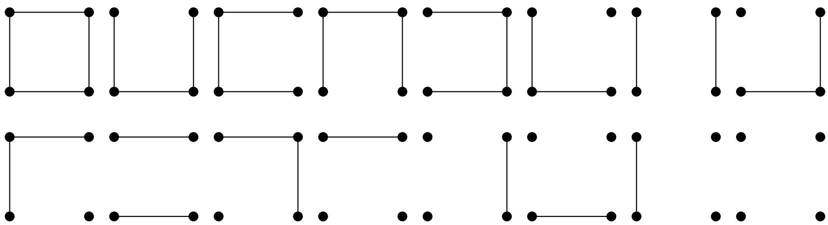
$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m} = \sum_{t=0}^{m} \binom{m}{t} = 2^m.$$

Odredimo sada sve razapinjuće podgrafove ciklusa C_4.



Slika 5. Graf ciklus C_4.

Graf C_4 ima $2^4 = 16$ razapinjućih podgrafova i svi su prikazani na sljedećoj slici.



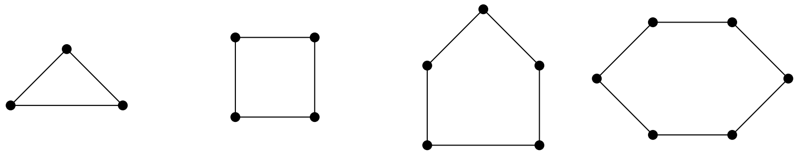
Slika 6. Razapinjući podgrafovi od C_4.

Postavimo li dodatni zahtjev da je razapinjući podgraf ujedno i stablo, nalazimo se pred osjetno težim problemom prebrojavanja kombinatornih objekata. Naime, svako razapinjuće stablo grafa s n vrhova ima $n-1$ bridova, no ne mora svaki razapinjući podgraf s $n-1$ bridova nužno biti povezan. U ostatku članka bavit ćemo se određivanjem $T(G)$ broja razapinjućih stabala grafa G.

Za graf ciklus C_4 s četiri vrha, jednostavno je prebrojati sva razapinjuća stabla: dobit ćemo ih brisanjem po jednog od četiri brida od C_4, pa je $T(C_4) = 4$.

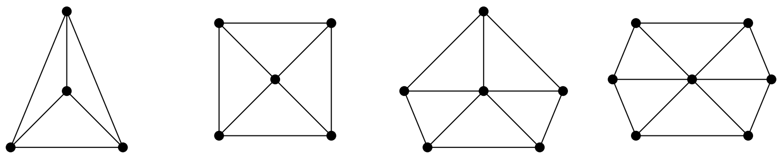
Slika 7. Razapinjuća stabla od C_4.

Ovu je ideju jednostavno poopćiti i primijeniti na cijelu familiju ciklusa: graf ciklus C_n s n bridova ima $T(C_n) = n$ razapinjućih stabala.



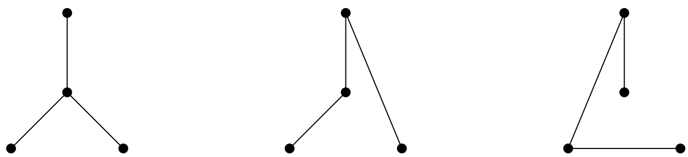
Slika 8. Ciklusi C_3, C_4, C_5 i C_6.

No, nije za svaki graf pa tako ni za familiju grafova jednostavno izračunati broj razapinjućih stabala. Kotač W_n je graf koji se dobije iz ciklusa C_n dodavanjem još jednog vrha povezanog sa svim vrhovima ciklusa.



Slika 9. Kotači W_3, W_4, W_5 i W_6.

Prebrojimo razapinjuća stabla kotača W_3. Za početak uočimo da središnji vrh v grafa W_3 ima stupanj $\deg(v) = 3$. Primjetimo da sva razapinjuća stabla T od W_3 možemo podijeliti u tri skupine, ovisno o tome koliki je stupanj vrha v u razapinjućem stablu T: $\deg(v) = 1, 2, 3$. Na sljedećoj slici prikazana su tri takva grafa, predstavnika svake skupine.



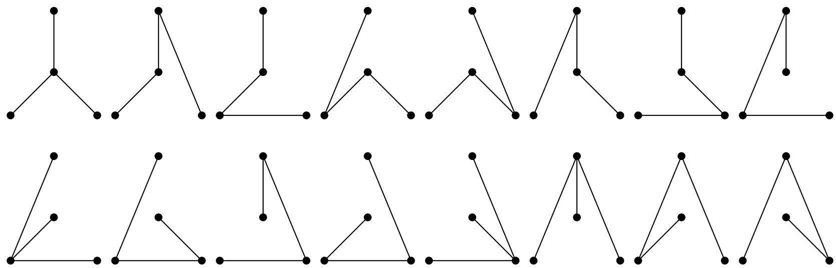
$\deg(v) = 3$ $\deg(v) = 2$ $\deg(v) = 1$

Slika 10. Primjeri razapinjućih stabala od W_3.

Odredimo koliko razapinjućih stabala broji pojedina skupina. U prvoj je samo jedno stablo, čiji su svi bridovi incidentni sa središnjim vrhom v. U drugom slučaju, dva brida incidentna sa središnjim možemo odabrati na $\binom{3}{2} = 3$ načina, a zatim treći brid iz ciklusa možemo odabrati na 2 načina. Dakle, druga skupina broji $3 \cdot 2 = 6$ stabala. U trećem slučaju imamo 9 stabala: $\binom{3}{1} = 3$ odabira za brid incidentan sa središnjim vrhom i $\binom{3}{2} = 3$ odabira za dva brida iz ciklusa. To nas dovodi do ukupnog rezultata:

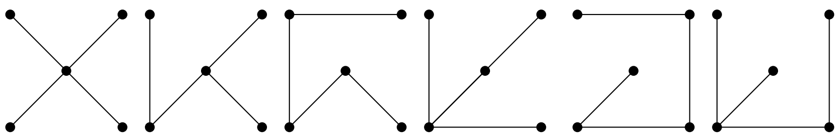
$$T(W_3) = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 16.$$

Radi potpunosti, evo i svih razapinjućih stabala od W_3.



Slika 11. Razapinjuća stabla grafa kotača W_3.

Isti postupak može se primijeniti za izračun $T(W_4)$. Sada je središnji vrh v u W_4 stupnja $\deg(v) = 4$. U razapinjućem stablu T vrh v može biti stupnja $\deg(v) = 1, 2, 3, 4$. Za $\deg(v) = 3, 4$, jednostavnije je prebrojati stabla, nego za $\deg(v) = 1, 2$. Naime, u potonjim slučajevima moramo odvojeno razmotriti stabla koja imaju dva lista i tri lista, što komplicira prebrojavanje. Na kraju, broj razapinjućih stabala od W_4 jednak je $T(W_4) = 1 + 4 \cdot 2 + (16 + 4) + (8 + 8) = 45$.



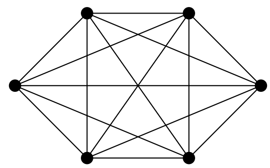
$\deg(v) = 4$ $\deg(v) = 3$ $\deg(v) = 2$ $\deg(v) = 2$ $\deg(v) = 1$ $\deg(v) = 1$

Slika 12. Primjeri razapinjućih stabala od W_4.

S povećanjem broja vrhova od W_n, postaje izazovnije primijeniti ovu jednostavnu kombinatornu tehniku za računanje $T(W_n)$ (vidi [11]). Sada ćemo zastati s rješavanjem ovog problema, a kasnije ćemo pomoću matričnog teorema o stablima pokazati da je

$$T(W_n) = \frac{(3 + \sqrt{5})^n}{2} + \frac{(3 - \sqrt{5})^n}{2} - 2.$$

Potpuni graf K_n je graf s n vrhova u kojem su svaka dva vrha susjedna. Graf K_n ima $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ bridova. Poznato je da potpuni graf K_n ima $T(K_n) = n^{(n-2)}$ razapinjućih stabala (vidi [3]), no za dokaz ovog rezultata potrebno je koristiti naprednije kombinatorne tehnike. Mi ćemo u ovom članku za dokaz ove tvrdnje koristiti matrični teorem o stablima koji ćemo iskazati i dokazati u nastavku.



Slika 13. Potpuni graf K_6

Za kraj poglavlja, evo jednog rezultata o rekurzivnoj prirodi broja $T(G)$, koji ćemo koristiti i u sljedećem poglavlju.

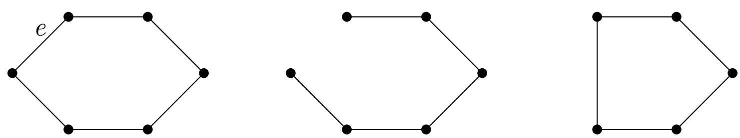
Lema 3. *[1] Neka je e brid grafa G. Za $T(G)$ broj razapinjućih stabala grafa G vrijedi*

$$T(G) = T(G - e) + T(G/e)$$

Dokaz. Razapinjuća stabla od G se dijele na ona koja ne sadrže brid e i ona koja sadrže brid e. Označimo broj pojedinih stabala s x i y; tada je $T(G) = x + y$. Uočimo da je svako razapinjuće stablo od G koje ne sadrži e, ujedno i razapinjuće stablo od $G - e$ pa je $x = T(G - e)$. Nadalje, svako razapinjuće stablo od G/e možemo dobiti iz razapinjućeg stabla od G koje sadrži brid e postupkom konkatenacije brida e u tom stablu. Obrnutim postupkom, svako razapinjuće stablo od G/e daje jedno razapinjuće stablo od G koje sadrži brid e pa je $y = T(G/e)$. Tvrdnja slijedi. $\square$

Primijenimo li ovu lemu na grafove cikluse C_n, dobit ćemo rekurzivnu relaciju za $T(C_n)$. Naime, za svaki brid e od C_n, podgraf $C_n - e$ je stablo pa je $T(C_n - e) = 1$. Istovremeno $C_n/e = C_{n-1}$ pa je

$$T(C_n) = T(C_n - 1) + 1 = n - 1 + 1 = n.$$

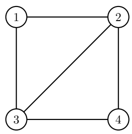


C_6 $\quad$ $C_6 - e$ $\quad$ $C_6/e = C_5$

3. Matrični teorem o stablima

U ovom poglavlja iskazat ćemo i dokazati Kirchoffov matrični teorem o stablima (vidi [7]) koji povezuje broj razapinjućih stabala grafa i determinantu matrice čije vrijednosti ovise o grafu.

Neka je G graf s n vrhova. Laplaceova matrica $L_G = D_G - A_G$ je simetrična matrica reda n. Primjetimo da je suma svakog retka i stupca od L_G jednaka 0. Zbog toga je determinanta od L_G jednaka 0 i L_G je singularna matrica.



$$L_G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Slika 14. Primjer grafa s 4 vrha.

Minora L_G^i Laplaceove matrice L_G je kvadratna matrica reda $(n-1)$ koja se dobije brisanjem i-tog retka i i-tog stupca od L_G.

Teorem 4 (Matrični teorem o stablima)**.** *[7] Neka je G graf s $n \geq 2$ vrhova, L_G Laplaceova matrica grafa G i $T(G)$ broj razapinjućih stabala od G. Tada vrijedi*

$$T(G) = \det L_G^i, \quad \forall i \leq n.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po broju vrhova n i bridova m grafa G.

Baza indukcije: pretpostavimo da je G graf s $n = 2$ vrha i bez bridova, dakle $m = 0$. Onda je $T(G) = 0$. S druge strane L_G je nul matrica

$$L_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je $\det L_G^i = 0$.

Pretpostavimo sada da teorem vrijedi za povezane grafove s manje od n vrhova ili m bridova.

Korak indukcije: neka je G graf s $n \geq 2$ vrhova i m bridova, i neka je v_i vrh od G. Ako je $\deg(v_i) = 0$, vrh v_i nije incidentan niti s jednim bridom i graf G nije povezan pa je $T(G) = 0$. i-ti redak i i-ti stupac od L_G su nul-vektori i vrijedi

$$\det L_G^i = \det L_{G-v_i} = 0.$$

Sada pretpostavimo da $\deg(v_i) \geq 1$, i vrh v_i je povezan s nekim drugim vrhom v_j bridom e. Prema lemi 3 broj razapinjućih stabala $T(G)$

zadovoljava sljedeći rekurzivni izraz:

$$T(G) = T(G-e) + T(G/e).$$

Prema pretpostavci matematičke indukcije tvrdnja teorema vrijedi za grafove $G-e$ i G/e, stoga

$$T(G) = \det L^i_{G-e} + \det L^j_{G/e}$$

Radi jednostavnosti zapisa, možemo razmjestiti vrhove od G tako da su v_i i v_j prva dva vrha. Sada Laplaceovu matricu L_G možemo zapisati kao blok matricu:

$$L_G = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i & -1 & r_i^T \\ \hline -1 & d_j & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array}\right]$$

Ovdje r_i i r_j predstavljaju $(n-2)$-dimenzionalne vektore koji opisuju povezanost vrhova v_i i v_j s ostalih $n-2$ vrhova od G, a r_i^T i r_j^T su njihovi transponirani vektori. L' je minora reda $(n-2)$ koja predstavlja Laplaceovu matricu ostatka grafa. Sada Laplaceove matrice grafova $G-e$ i G/e možemo zapisati na sljedeći način:

$$L_{G-e} = \left[\begin{array}{c|c|c} d_i - 1 & 0 & r_i^T \\ \hline 0 & d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_i & r_j & L' \end{array}\right], \quad L_{G/e} = \left[\begin{array}{c|c} d_i + d_j - 2 & r_i^T + r_j^T \\ \hline r_i + r_j & L' \end{array}\right].$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$\det L^i_G = \det L^i_{G-e} + \det L^j_{G/e},$$

ili, u matričnom zapisu:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} d_j & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right] + \det L'.$$

Uočimo da se matrice L^i_G i L^i_{G-e} razlikuju samo na poziciji $(1,1)$, i to za 1. Stoga će se vrijednosti $\det L^i_G$ i $\det L^i_{G-e}$ razlikovati samo u prvom kofaktoru u razvoju po prvom retku. Uistinu, razvijemo li $\det L^i_G$ po prvom retku, gdje C_{1k} označava odgovarajući kofaktor od L^i_G, dobit ćemo

$$\begin{aligned}
\det L^i_G = \det \left[\begin{array}{c|c} d_j & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right] &= d_j \det L' + \sum_{k=2}^{n} l_{1k} C_{1k} \\
&= \left((d_j - 1) \det L' + \sum_{k=2}^{n} l_{1k} C_{1k} \right) + \det L' \\
&= \det \left[\begin{array}{c|c} d_j - 1 & r_j^T \\ \hline r_j & L' \end{array}\right] + \det L' = \det L^i_{G-e} + \det L^j_{G/e}
\end{aligned}$$

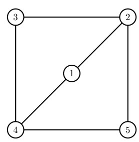
Konačno,

$$T(G) = \det L_G^i.$$

□

4. Prebrajanje razapinjućih stabala grafa pomoću matričnog teorema o stablima

U ovom poglavlju primjenit ćemo matrični teorem o stablima za računanje broja razapinjućih stabala poznatih familija grafova. Za početak, za ilustraciju, evo jednog jednostavnog primjera.



Slika 15. Graf G s 5 vrhova.

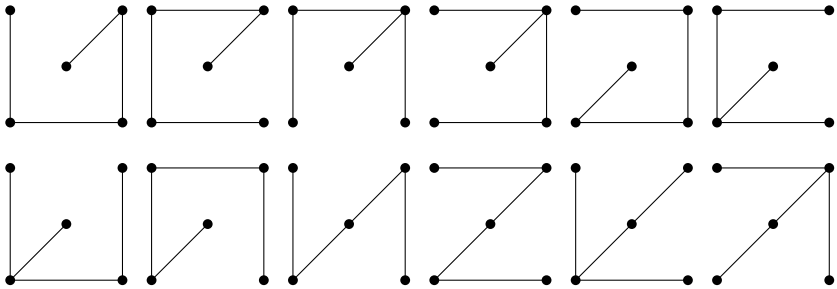
Na slici je prikazan graf G s 5 vrhova. Matrica susjedstva A_G i Laplaceova matrica L_G su sljedeće:

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Brisanjem prvog retka i prvog stupca od L_G, dobit ćemo L_G^1 i broj razapinjućih stabala $T(G)$.

$$T(G) = \det L_G^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Radi potpunosti, evo svih 12 razapinjućih stabala grafa G.



Slika 16. Razapinjuća stabla grafa sa slike 15.

U nastavku ćemo korištenjem Kirchoffovog teorema izračunati broj razapinjućih stabala potpunog grafa K_n, potpunog bipartitnog grafa K_{rs} i grafa kotača W_n. Uvedimo nekoliko oznaka. Kvadratnu jediničnu matricu reda n označavat ćemo s I_n. Pravokutnu matricu dimenzije $m \times n$ ispunjenu jedinicama označavat ćemo s E_{mn}, ili kraće s E_m u slučaju $m = n$.

Sada ćemo pokazati da potpuni graf K_n s n vrhova K_n ima n^{n-2} razapinjućih stabala. Odredimo matricu susjedstva

$$A_{K_n} = E_n - I_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

i Laplaceovu matricu od K_n

$$L_{K_n} = (n-1)I_n - (E_n - I_n) = nI_n - E_n = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & n-1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da će minora od L_{K_n} reda $n-1$ biti jednaka za svaki i:

$$L^i_{K_n} = nI_{n-1} - E_{n-1} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & n-1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo determinantu $\det L^i_{K_n}$. Počinjemo tako da prvom retku pribrojimo sve ostale retke, a zatim svim ostalim retcima pribrojimo dobiveni prvi redak. Dobit ćemo trokutastu matricu čiju je determinantu lako izračunati:

$$T(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & n-1 & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

Potpuni bipartitni graf K_{rs} je graf čiji se skup vrhova može prikazati kao disjunktna unija $V = A \cup B$ pri čemu je $|A| = r$, $|B| = s$, i svaki vrh iz skupa A je spojen sa svakim vrhom iz skupa B. Potpuni bipartitni graf K_{rs} ima $r + s$ vrhova i $r \cdot s$ bridova. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prvih s redaka matrice susjedstva $A_{K_{rs}}$ indeksirano s vrhovima iz B, a zadnjih r redaka s vrhovima iz A. Matrica $A_{K_{rs}}$ je sljedeća kvadratna matrica reda $r + s$:

$$A_{K_{rs}} = \begin{bmatrix} 0 & E_{sr} \\ E_{rs} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredimo Laplaceovu matricu

$$L_{K_{rs}} = \begin{bmatrix} rI_s & -E_{sr} \\ -E_{rs} & sI_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & r & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & s \end{bmatrix}$$

i minoru $L^{r+s}_{K_{rs}}$, kvadratnu matricu reda $r + s - 1$, dobivenu brisanjem zadnjeg retka i stupca u $L_{K_{rs}}$

$$L^{r+s} = \begin{bmatrix} rI_s & -E_{s,r-1} \\ -E_{r-1,s} & sI_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & r & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & s \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo sada $T(K_{rs}) = \det L^{r+s}$. U prvom koraku, pribrojimo prvom retku sve preostale retke. U drugom koraku pribrojimo prvi redak posljednjih $r - 1$ redaka determinante. Dobit ćemo trokutastu matricu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & r & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & r & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & s \end{vmatrix},$$

i konačno, broj razapinjućih stabala potpunog bipartitnog grafa K_{rs} iznosi

$$T(K_{rs}) = r^{s-1}s^{r-1}.$$

Ranije smo izračunali broj razapinjućih stabala za grafove kotače W_3 i W_4. Odredimo sada broj razapinjućih stabala za W_n, $n \geq 3$ pomoću matričnog teorema o stablima. Uočimo uzorak na matricama susjedstva A_{W_n},

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Laplaceovim matricama L_{W_n}

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix};$$

te na minorama $L^1_{W_n}$ Laplacovih matrica L_{W_n}:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je $L^1_{W_n}$ cirkularna matrica reda n i vrijedi:

$$T(W_n) = \det L^1_{W_n} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Cirkularne matrice su od velike važnosti u numeričkoj matematici. Poznato je da se njihove svojstvene vrijednosti pa stoga i determinanta, mogu izraziti pomoću korijena jedinice (vidi [4]). U ovom slučaju vrijedi

$$T(W_n) = \prod_{j=0}^{n-1} (3 - \omega - \omega^{j(n-1)}),$$

gdje je $\omega = \exp^{\frac{2\pi i}{n}}$ primitivni n-ti korijen iz jedinice. Kako bismo dobili standardnu formulu za $T(W_n)$, izračunat ćemo determinantu ove cirkularne matrice Laplacovim razvojem po prvom retku.

$$\begin{aligned} T(W_n) =& 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 3 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

Označimo s t_n determinantu trodijagonalne matrice reda n:

$$t_n = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Razvijemo li posljednje dvije determinante iz (1) po prvom stupcu, dobit ćemo

$$T(W_n) = 3t_{n-1} - t_{n-2} - 1 - 1 - t_{n-2} = 3t_{n-1} - 2t_{n-2} - 2$$

Za determinantu trodijagonalne matrice (2) vrijedi:

$$t_n = 3t_{n-1} - t_{n-2}.$$

Rješavanjem ove rekurzivne relacije s početnim uvjetima $t_0 = 1, t_{-1} = 0$ dobiva se

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Konačno, broj razapinjućih stabala grafa kotača W_n iznosi

$$T(W_n) = t_n - t_{n-2} - 2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - 2.$$

Literatura

[1] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, *The Dissection of Rectangles Into Squares*, Duke Math. J. **7**, 312–340 (1940).

[2] M. Bóna, *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, 4. izdanje, World Scientific, New Jersey, 2017.

[3] A. Cayley, *A Theorem on Trees*, Quart. J. Pure Appl. Math. **23**, 376–378 (1889).

[4] P. J. Davis, *Circulant Matrices*, Wiley, New York, 1979.

[5] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2016.

[6] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[7] G. Kirchhoff, *Uber die Auflosung der Gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer Strome gefuhrt wird*, Ann. Phys. Chem. **72**, 497-508 (1847).

[8] D. Kovačević, M. Krnić, A. Nakić, M.O. Pavčević, *Diskretna matematika 1*, UNIZG-FER, Zagreb, 2019.

[9] J.W. Moon, *Counting Labelled Trees*, Canadian mathematical monographs, William Clowes and Sons Ltd., London and Beccles, 1970.

[10] C. Moore, S. Mertens, *The Nature of Computation*, Oxford University Press Inc., New York, 2011.

[11] J. Sedlacek, *Ungerichtete Graphen und ihre Geriiste*, In *Beitrage zur Graphentheorie*, (H. Sachs, H.-J. Vosz, and H. Walther, editors), Leipzig, Teubner, 143–146 (1968).

Dorian Kablar
Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb
E-mail adresa: `dorian.kablar@fer.hr`

Anamari Nakić
Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb
E-mail adresa: `anamari.nakic@fer.hr`