ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.1 (2018) 51-62

L'Hospitalovo pravilo

Goran Kovačević

Sažetak

L'Hospitalov teorem daje odgovor na pitanje pod kojim uvjetima je traženi limes $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ jednak limesu $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, gdje je $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, a funkcije f i g su derivabilne (bar na nekoj okolini od c) s derivacijama f' i g'. U udžbenicima više matematike najčešće se mogu naći samo dokazi za slučaj u kojemu je: $c\in\mathbb{R}$, f i g su neprekidno derivabilne na nekom intervalu koji sadrži točku c te je $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$. Prirodno se javlja potreba dokazivanja tog teorema uz slabije uvjete (npr. ako ne zahtijevamo neprekidnost derivacija f' i g') te u svim ostalim varijantama (npr. kada je $c=\pm\infty$ ili $L=\pm\infty$). Ovaj rad praktično daje dokaze svih varijanti tog teorema. Za neke teoreme se lako ustanovi da su u svojim tvrdnjama vrlo slični ili ekvivalentni, pa je dovoljno dokazati da vrijedi jedan (bilo koji) od takvih teorema. Definicije ključnih pojmova te iskazi i dokazi teorema Rollea i Cauchyja mogu se naći usvakom udžbeniku više matematike (matematičke analize), npr. u [1], [2] ili [3], pa im, iz tog razloga, u radu nije posvećena posebna pozornost.

Ključni pojmovi: limes, neprekidnost, derivabilnost, derivacija, teorem (Rolleov, Cauchyjev)

1 L'Hospitalovo pravilo

Teorem 1. *Neka su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I=\langle a,b\rangle\subseteq\mathbb{R}$ osim možda u točki $c\in I$, te neka je*

$$g'(x)\neq 0 \text{ za svaki } x\in I\backslash\{c\}.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ *i* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *onda je i*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dokaz. a) Dokažimo najprije posebni slučaj teorema uz sljedeće dodatne pretpostavke:

$$f' \text{ i } g' \text{ su neprekidne u točki } c \text{ te je } g'(c) \neq 0.$$

Iz dodatnih pretpostavki slijedi da je $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = f'(c) \in \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{x\to c} g'(x) = g'(c) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ pa je

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f'(x)}{\lim\limits_{x\to c} g'(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Funkcije f i g su derivabilne, dakle i neprekidne, na intervalu I pa tako i u točki $c \in I$. Stoga je

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = 0 \text{ i } g(c) = \lim_{x\to c} g(x) = 0.$$

Primijetimo da je za po volji odabrani $x \in \langle c, b\rangle$ funkcija g neprekidna na segmentu $[c, x]$ i derivabilna na intervalu $\langle c, x\rangle$ te je $g'(y) \neq 0$ za svaki $y \in \langle c, x\rangle$. Po obratu po kontrapoziciji Rolleovog teorema slijedi da je $g(x) \neq 0 = g(c)$. Dakle, $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle c, b\rangle$.
Analogno, za po volji odabrani $x \in \langle a, c\rangle$ funkcija g je neprekidna na segmentu $[x, c]$ i derivabilna na intervalu $\langle x, c\rangle$ te je $g'(y) \neq 0$ za svaki $y \in \langle x, c\rangle$. Obratom po kontrapoziciji Rolleova teorema dobivamo da je $g(x) \neq 0 = g(c)$ pa je $g(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a, c\rangle$. Stoga je funkcija $\frac{f}{g}$ dobro definirana na skupu $I\setminus\{c\}$. Imamo:

$$L = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim\limits_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

b) Opći slučaj
Funkcije f i g su derivabilne, prema tome i neprekidne, na skupu $I\setminus\{c\}$. Definirajmo funkcije F i G na intervalu I na sljedeći način:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, ako je } x \in I \setminus \{c\} \\ 0 & \text{, ako je } x = c \end{cases}$$

i

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{, ako je } x \in I \setminus \{c\} \\ 0 & \text{, ako je } x = c \end{cases}.$$

Te funkcije su neprekidne (jer su f i g neprekidne) na $I\backslash\{c\}$, a neprekidne su i u točki c jer je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} F(x) &= \lim_{x\to c} f(x) = 0 = F(c)\,,\\ \lim_{x\to c} G(x) &= \lim_{x\to c} g(x) = 0 = G(c)\,.\end{aligned}$$

One su i derivabilne (jer su f i g derivabilne) na $I\setminus\{c\}$ te je

$$F'(x) = f'(x) \text{ i } G'(x) = g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I\setminus\{c\}\,.$$

Dakle, funkcije F i G su za proizvoljno odabrani $x \in \langle a, c\rangle$ neprekidne na segmentu $[x, c]$ i derivabilne na intervalu $\langle x, c\rangle$ te je $G'(y) \neq 0$ za svaki $y \in \langle x, c\rangle$. Obrat po kontrapoziciji Rolleova teorema daje:

$$g(x) = G(x) \neq G(c) = 0 \text{ za svaki } x \in \langle a, c\rangle\,.$$

Po Cauchyjevu teoremu, za svaki $x \in \langle a, c\rangle$ postoji $\alpha_x \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$\frac{F'(x+\alpha_x(c-x))}{G'(x+\alpha_x(c-x))} = \frac{F(c)-F(x)}{G(c)-G(x)} = \frac{0-F(x)}{0-G(x)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to c^-}\frac{F(x)}{G(x)}\\ &= \lim_{x\to c^-}\frac{F'(x+\alpha_x(c-x))}{G'(x+\alpha_x(c-x))}\\ &= \lim_{x\to c^-}\frac{f'(x+\alpha_x(c-x))}{g'(x+\alpha_x(c-x))}\\ &= L.\end{aligned}$$

Naime, iz $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ slijedi da je $\lim_{x\to c^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, pa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da čim je $c - x < \delta$, onda je $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$. Kako je $c - [x + \alpha_x(c-x)] < c - x < \delta$, to je

$$\left|\frac{f'(x+\alpha_x(c-x))}{g'(x+\alpha_x(c-x))} - L\right| < \varepsilon.$$

Slično, funkcije F i G su za proizvoljno odabrani $x \in \langle c, b\rangle$ neprekidne na segmentu $[c, x]$ i derivabilne na intervalu $\langle c, x\rangle$ te je $G'(y) \neq 0$ za svaki $y \in \langle c, x\rangle$. Obrat po kontrapoziciji Rolleova teorema daje:

$$g(x) = G(x) \neq G(c) = 0 \text{ za svaki } x \in \langle c, b\rangle\,.$$

Po Cauchyjevu teoremu, za svaki $x \in \langle c, b\rangle$ postoji $\beta_x \in \langle 0,1\rangle$ takav da je

$$\frac{F'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}{G'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}=\frac{F\left(x\right)-F\left(c\right)}{G\left(x\right)-G\left(c\right)}=\frac{F\left(x\right)-0}{G\left(x\right)-0}=\frac{F\left(x\right)}{G\left(x\right)}$$

pa imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c^+}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} &= \lim_{x\to c^+}\frac{F\left(x\right)}{G\left(x\right)}\\ &= \lim_{x\to c^+}\frac{F'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}{G'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}\\ &= \lim_{x\to c^+}\frac{f'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}{g'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}\\ &= L.\end{aligned}$$

Naime, iz $x-c<\delta \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon$ i $\left[c+\beta_x\left(x-c\right)\right]-c<x-c<\delta$ slijedi da je

$$\left|\frac{f'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}{g'\left(c+\beta_x\left(x-c\right)\right)}-L\right|<\varepsilon.$$

Dakle, $\lim\limits_{x\to c^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L\in\mathbb{R}$ pa je $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$ □

Teorem 2. *Neka su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I=\langle a,\infty\rangle\subset\mathbb{R}$ za neki $a>0$, te neka je $g'\left(x\right)\neq 0$ za svaki $x\in I$. Ako je $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=0$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$, onda je i*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=L.$$

Dokaz. Funkcije f i g su derivabilne u svakoj točki intervala I akko (ako i samo ako) su funkcije φ i ψ definirane sa

$$\varphi\left(t\right)=f\left(\tfrac{1}{t}\right)\text{ i }\psi\left(t\right)=g\left(\tfrac{1}{t}\right)$$

derivabilne u svakoj točki $t\in\left\langle 0,\frac{1}{a}\right\rangle$. Osim toga vrijedi: $g'\left(x\right)\neq 0$ za svaki $x\in I$ akko je $\psi'\left(t\right)=-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)\neq 0$ za svaki $t\in\left\langle 0,\frac{1}{a}\right\rangle$.

$$0=\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\left[\begin{array}{c}x=\frac{1}{t}\\ x\to\infty\Leftrightarrow t\to 0^+\end{array}\right]=\lim_{t\to 0^+}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+}\varphi\left(t\right),$$

$$0=\lim_{x\to\infty}g\left(x\right)=\left[\begin{array}{c}x=\frac{1}{t}\\ x\to\infty\Leftrightarrow t\to 0^+\end{array}\right]=\lim_{t\to 0^+}g\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+}\psi\left(t\right),$$

$$\begin{aligned} L = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ x \to \infty \Leftrightarrow t \to 0^+ \end{array} \right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{(*)}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ x \to \infty \Leftrightarrow t \to 0^+ \end{array} \right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \overset{\text{Tm 1.}}{=} L.$$

Jednakost $(*)$ vrijedi jer je, po teoremu o derivaciji kompozicije,

$$\varphi'(t) = \left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)' = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\psi'(t) = \left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)' = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right).$$

□

Slično dokazujemo sljedeći teorem.

Teorem 3. *Neka su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle -\infty, b\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $b < 0$, te neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$. Ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, onda je i*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Teorem 4. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c, c+\delta\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^+} |f(x)| = \lim\limits_{x\to c^+} |g(x)| = \infty$ i $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, onda je i

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dokaz. Neka vrijede sve pretpostavke teorema.

Odaberimo proizvoljni $\varepsilon > 0$. Pokažimo da postoji $\delta' \in \langle 0, \delta]$ takav da

$$x \in \langle c, c+\delta'\rangle \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

Iz $\lim\limits_{x\to c^+}|f(x)| = \lim\limits_{x\to c^+}|g(x)| = \infty$ i $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ zaključujemo da postoji $\delta_1 \in \langle 0,\delta]$ za kojega vrijedi:

1) $|f(x)| > 0$ i $|g(x)| > 0$ za svaki $x \in \langle c, c+\delta_1\rangle$,

2) $x \in \langle c, c+\delta_1\rangle \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. $(*)$

Odaberimo proizvoljni $\delta_2 \in \langle 0,\delta_1\rangle$ i proizvoljni $x \in \langle c, c+\delta_2\rangle$. Tada je $[x, c+\delta_2] \subset I$ pa su funkcije f i g neprekidne na segmentu $[x, c+\delta_2]$ i derivabilne na intervalu $\langle x, c+\delta_2\rangle$ (jer su derivabilne, pa stoga i neprekidne na I) te je $g'(y) \neq 0$ za svaki $y \in \langle x, c+\delta_2\rangle$ (jer je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$). Po Cauchyjevom teoremu, postoji točka $d \in \langle x, c+\delta_2\rangle$ takva da je

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(c+\delta_2) - f(x)}{g(c+\delta_2) - g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c+\delta_2)}{g(x)}}{1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}}.$$

Jednakost

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c+\delta_2)}{g(x)}}{1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}}$$

možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(c+\delta_2)}{g(x)} - \frac{f'(d)}{g'(d)}\frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}.$$

Koristeći svojstva apsolutne vrijednosti dobivamo:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(d)}{g'(d)}\right| &= \left|\frac{f(c+\delta_2)}{g(x)} + \frac{-f'(d)}{g'(d)}\frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}\right| \\ &\leq \frac{|f(c+\delta_2)|}{|g(x)|} + \left|\frac{f'(d)}{g'(d)}\right|\frac{|g(c+\delta_2)|}{|g(x)|}. \quad (**)\end{aligned}$$

Budući da je $d \in \langle x, c+\delta_2\rangle \subset \langle c, c+\delta_1\rangle$, za d vrijedi nejednakost $(*)$, tj.

$$L - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{f'(d)}{g'(d)} < L + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kako je $-|L| \leq L \leq |L|$, imamo

$$-\left(|L| + \frac{\varepsilon}{3}\right) = -|L| - \frac{\varepsilon}{3} \leq L - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{f'(d)}{g'(d)} < L + \frac{\varepsilon}{3} \leq |L| + \frac{\varepsilon}{3}$$

pa je

$$\left|\frac{f'(d)}{g'(d)}\right| < |L| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stoga iz $(**)$ slijedi

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f'(d)}{g'(d)}\right|<\frac{|f(c+\delta_2)|}{|g(x)|}+\left(|L|+\frac{\varepsilon}{3}\right)\frac{|g(c+\delta_2)|}{|g(x)|}.$$

Iz $\lim\limits_{x\to c^+}|g(x)|=\infty$ zaključujemo da postoji $\delta_3\in\langle 0,\delta_2]$ takav da čim je $x\in\langle c,c+\delta_3\rangle$ slijedi da je

$$\begin{cases} |g(x)|>\frac{3|f(c+\delta_2)|}{\varepsilon}\Leftrightarrow\frac{|f(c+\delta_2)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{3}, \\ |g(x)|>\frac{3}{\varepsilon}\left(|L|+\frac{\varepsilon}{3}\right)|g(c+\delta_2)|\Leftrightarrow\left(|L|+\frac{\varepsilon}{3}\right)\frac{|g(c+\delta_2)|}{|g(x)|}<\frac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Sada za $\delta'=\delta_3$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x\in\langle c,c+\delta'\rangle \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| &= \left|\left[\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f'(d)}{g'(d)}\right]+\left[\frac{f'(d)}{g'(d)}-L\right]\right| \\ &\le \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f'(d)}{g'(d)}\right|+\left|\frac{f'(d)}{g'(d)}-L\right| \\ &< \frac{|f(c+\delta_2)|}{|g(x)|}+\left(|L|+\frac{\varepsilon}{3}\right)\frac{|g(c+\delta_2)|}{|g(x)|}+\left|\frac{f'(d)}{g'(d)}-L\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Slično se dokaže sljedeći teorem.

Teorem 5. *Neka postoji $\delta>0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I=\langle c-\delta,c\rangle\subset\mathbb{R}$ za neki $c\in\mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x)\neq 0 \text{ za svaki } x\in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to c^-}|g(x)|=\infty$ i $\lim\limits_{x\to c^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathbb{R}$, onda je i

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

Teorem 6. *Neka postoji $\delta>0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I=\langle c,c+\delta\rangle\subset\mathbb{R}$ za neki $c\in\mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x)\neq 0 \text{ za svaki } x\in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c^+}g(x)=\infty$ i $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, onda je i

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

Dokaz. Odaberimo proizvoljni $\varepsilon > 0$. Pokažimo da postoji $\delta' \in \langle 0, \delta]$ takav da

$$x \in \langle c, c+\delta' \rangle \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \varepsilon.$$

Iz $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} g(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ zaključujemo da postoji $\delta_1 \in \langle 0, \delta]$ za kojega vrijedi:

1) funkcije f i g su pozitivne na intervalu $\langle c, c+\delta_1 \rangle$,

2) $x \in \langle c, c+\delta_1 \rangle \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > 2\varepsilon$. $(*)$

Odaberimo proizvoljni $\delta_2 \in \langle 0, \delta_1 \rangle$ i proizvoljni $x \in \langle c, c+\delta_2 \rangle$. Tada je $[x, c+\delta_2] \subset I$ pa su funkcije f i g neprekidne na segmentu $[x, c+\delta_2]$ i derivabilne na intervalu $\langle x, c+\delta_2 \rangle$ (jer su derivabilne, pa stoga i neprekidne na I) te je $g'(y) \neq 0$ za svaki $y \in \langle x, c+\delta_2 \rangle$ (jer je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$).

Po Cauchyjevom teoremu, postoji točka $d \in \langle x, c+\delta_2 \rangle$ takva da je

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{f(c+\delta_2) - f(x)}{g(c+\delta_2) - g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c+\delta_2)}{g(x)}}{1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}}.$$

Jednakost

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c+\delta_2)}{g(x)}}{1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}}$$

možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c+\delta_2)}{g(x)} + \frac{f'(d)}{g'(d)} \left[1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}\right]. \ (**)$$

Po 1) je $f(c+\delta_2) > 0$ i $g(x) > 0$ pa iz $(**)$ slijedi

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f'(d)}{g'(d)} \left[1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)}\right].$$

Budući da je $d \in \langle x, c+\delta_2 \rangle \subset \langle c, c+\delta_1 \rangle$, za d vrijedi nejednakost $(*)$, tj.

$$\frac{f'(d)}{g'(d)} > 2\varepsilon.$$

Iz $\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = \infty$ zaključujemo da postoji $\delta_3 \in \langle 0, \delta_2]$ takav da

$$x \in \langle c, c+\delta_3 \rangle \Rightarrow g(x) > 2g(c+\delta_2) \Leftrightarrow 1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)} > \frac{1}{2}.$$

Stoga, za $\delta' = \delta_3$ vrijedi:

$$x \in \langle c, c+\delta' \rangle \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f'(d)}{g'(d)} \left[1 - \frac{g(c+\delta_2)}{g(x)} \right] > \frac{f'(d)}{g'(d)} \cdot \frac{1}{2} \overset{(*)}{>} 2\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

□

Teorem 7. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c, c+\delta \rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} g(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, onda je i

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Dokaz. Neka je $-f$ realna funkcija definirana s $(-f)(x) = -f(x)$. Analogno definiramo i funkciju $-g$. Kako je

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{-f(x)}{-g(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{(-f)(x)}{(-g)(x)}$$

i

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{-f'(x)}{-g'(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{(-f)'(x)}{(-g)'(x)}$$

te je

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} g(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to c^+} (-f)(x) = \lim_{x \to c^+} (-g)(x) = \infty$$

tvrdnja slijedi iz Teorema 6. □

Slično Teoremu 7 dokazuju se Teoremi 8 i 9.

Teorem 8. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c, c+\delta \rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\lim\limits_{x \to c^+} g(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, onda je i

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Teorem 9. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c, c+\delta\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\lim\limits_{x\to c^+} g(x) = -\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, *onda je i*

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Slično Teoremu 6 možemo dokazati sljedeći teorem.

Teorem 10. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c-\delta, c\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} g(x) = \infty$ *i* $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, *onda je i*

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Lako se vidi da su Teorem 10 i Teoremi 11-13 međusobno ekvivalentni.

Teorem 11. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c-\delta, c\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} g(x) = -\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, *onda je i*

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Teorem 12. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c-\delta, c\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\lim\limits_{x\to c^-} g(x) = \infty$ *i* $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, *onda je i*

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Teorem 13. *Neka postoji $\delta > 0$ takav da su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle c - \delta, c\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $c \in \mathbb{R}$, te neka je*

$$g'(x) \neq 0 \text{ za svaki } x \in I.$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\lim\limits_{x\to c^-} g(x) = -\infty$ *i* $\lim\limits_{x\to c^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, *onda je i*

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Teorem 14. *Neka su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle a, \infty\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $a > 0$, te neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$. Ako je* $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to\infty} |g(x)| = \infty$ *i* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *onda je i*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dokaz. Sličan dokazu Teorema 2 kad primijenimo Teoreme 4, 6,7, 8 i 9. □

Slično Teoremu 14 dokazuje se sljedeći teorem.

Teorem 15. *Neka su realne funkcije f i g derivabilne na intervalu $I = \langle -\infty, b\rangle \subset \mathbb{R}$ za neki $b < 0$, te neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$. Ako je* $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\infty} |g(x)| = \infty$ *i* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$, *onda je i*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[2] I. Slapničar, *Matematika 1*, interaktivni udžbenik, Sveučilište u Splitu, 2002.

[3] N. Uglešić, *Viša matematika I i II*, skripta

[4] `http://bcs.whfreeman.com/webpub/Ektron/rogawskiapet2e/Additional%20Proofs/Proof%20of%20L%20hopitals%20Rule.pdf`

Goran Kovačević
Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet, Ruđera Boškovića 37, Split
E-mail adresa: goran.kovacevic@pfst.hr