ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.7 (2024) 65–79
https://doi.org/10.32817/amssd.7.5

Zaprimljen: 3. lipnja 2024.
Prihvaćen: 3. rujna 2024.

O konikama u izotropnoj ravnini

Vladimir Volenec, Marija Šimić Horvath, Ema Jurkin

Sažetak

U članku dajemo potpunu klasifikaciju konika u izotropnoj ravnini. Definiramo osnovne elemente konike poput fokusa, tjemena, direktrisa i asimptota te određujemo njihove koordinate, odnosno jednadžbe.

Ključni pojmovi: izotropna ravnina, konike, žarišta (fokusi), ravnalice (direktrise), tjemena, asimptote

Abstract

In this paper, we provide a complete classification of conics in the isotropic plane. We define the basic elements of a conic such as focus, vertex, directrix and asymptote and we determine their coordinates and equations.

Keywords: isotropic plane, conics, foci, straight lines, vertices, asymptotes

1. Uvod

Izotropna ravnina realna je projektivna metrička ravnina u kojoj je metrika inducirana *apsolutnom figurom* (Ω, ω). Točku Ω nazivamo *apsolutnom točkom*, a pravac ω *apsolutnim pravcem*. Točke koje pripadaju apsolutnom pravcu ω nazivaju se *izotropne točke*, a pravci koji prolaze apsolutnom točkom Ω jesu *izotropni pravci*. *Paralelni pravci* su oni koji imaju zajedničku izotropnu točku, a *paralelne točke* su one koje pripadaju istome izotropnom pravcu.
Promatrajući projektivnu ravninu u homogenim koordinatama gdje su točke prikazane u obliku $T = (x : y : z)$, projektivni koordinatni sustav

biramo tako da je apsolutni pravac oblika $(0:0:1)$, tj. ima jednadžbu $z=0$, a apsolutna točka je točka $(0:1:0)$. Stoga klasični Kartezijev koordinatni sustav afini je model izotropne ravnine gdje je apsolutni pravac beskonačno daleki pravac afine ravnine, a apsolutna točka beskonačno je daleka točka y-osi. Izotropni pravci paralelni su s y-osi.
Svaku neizotropnu točku oblika $(x:y:1)$ u euklidskom modelu prikazujemo s (x,y). Izotropna točka oblika $(x:y:0)$ beskonačno je daleka točka pravca s koeficijentom smjera $\frac{y}{x}$. Za dvije neparalelne točke $T_1(x_1,y_1)$ i $T_2(x_2,y_2)$ definira se *udaljenost* tako da je $d(T_1,T_2)=x_2-x_1$. Dakle, u našem euklidskom modelu udaljenost između dviju neparalelnih točaka mjeri se na osi x. Za dvije paralelne točke $T_1(x,y_1)$ i $T_2(x,y_2)$ definira se *raspon* $s(T_1,T_2)=y_2-y_1$.
Pravcu s koordinatama $(X:Y:Z)$ pridružena je jednadžba $Xx+Yy+Zz=0$ u homogenim koordinatama odnosno, jednadžba $Xx+Yy+Z=0$ u nehomogenim koordinatama. Izotropni pravci imaju jednadžbe oblika $x=c$, $c\in\mathbb{R}$. Neka su $p_1\ldots y=k_1x+l_1$ i $p_2\ldots y=k_2x+l_2$ dva neizotropna pravca. Kut između njih definira se kao $\varphi=\angle(p_1,p_2)=k_2-k_1$. Svi su definirani metrički elementi orijentirani. Više o izotropnoj ravnini čitatelji mogu naći u [3]-[4].

2. Točkovna i pravčasta jednadžba konika u projektivnoj ravnini

Krivuljom 2. *reda* ili kraće *konikom* nazivamo skup točaka $(x:y:z)$ projektivne ravnine, čije koordinate zadovoljavaju homogenu kvadratnu jednadžbu

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0, \tag{1}$$

u kojoj su koeficijenti $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23}\in\mathbb{R}$ određeni do na proporcionalnost. Reći ćemo da je konika (1) *regularna* ili *singularna* već prema tome je li $\delta\neq 0$ ili $\delta=0$, gdje je

$$\delta=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}{a_{23}}^2-a_{22}{a_{13}}^2-a_{33}a_{12}^2. \tag{2}$$

Pokazuje se da su singularne konike one koje se raspadaju na dva pravca. S

$$A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2, A_{22}=a_{33}a_{11}-{a_{13}}^2, A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,$$
$$A_{23}=a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23}, A_{13}=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}, A_{12}=a_{23}a_{13}-a_{33}a_{12} \tag{3}$$

označit ćemo algebarske komplemente elemenata $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23}$ u determinanti δ danoj s (2).

Krivulja 2. razreda je skup pravaca $(X : Y : Z)$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0. \quad (4)$$

Taj uvjet zadovoljavaju sve tangente regularne konike (1).
Za brojeve $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{12}, A_{13}, A_{23}$ u (3) vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} &A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = \delta a_{11}, \quad A_{33}A_{11} - {A_{13}}^2 = \delta a_{22}, \quad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \delta a_{33} \quad (5)\\ &A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23} = \delta a_{23}, \quad A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13} = \delta a_{13}, \quad A_{23}A_{13} - A_{33}A_{12} = \delta a_{12}. \end{aligned}$$

jer se zbog (2) i (3) dobije npr.

$$\begin{aligned} &A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = (a_{33}a_{11} - {a_{13}}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) - (a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})^2\\ &= a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{33}a_{12}^2 - {a_{13}}^2a_{22} + 2a_{13}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}^2) = \delta a_{11},\\ &A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23} = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})\\ &- (a_{22}a_{33} - {a_{23}}^2)(a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23})\\ &= a_{23}(2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{33}{a_{12}}^2 - a_{22}{a_{13}}^2 + a_{22}a_{33}a_{11} - a_{11}{a_{23}}^2) = \delta a_{23}, \end{aligned}$$

a vrijede i jednakosti

$$\delta' = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \delta^2 \quad (6)$$

jer zbog (2) vrijedi npr. jednakost

$$\begin{aligned} \delta &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + a_{12}(a_{23}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

pa se onda zbog (5) dobije

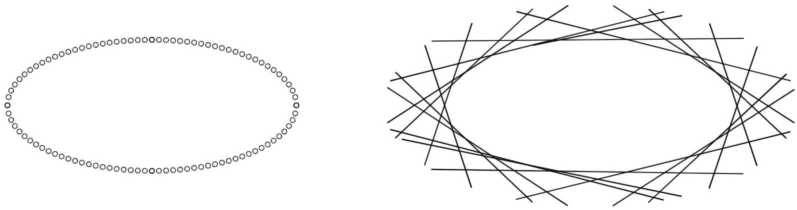
$$\begin{aligned} \delta' &= A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) + A_{12}(A_{23}A_{13} - A_{12}A_{33}) + A_{13}(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})\\ &= A_{11} \cdot \delta a_{11} + A_{12} \cdot \delta a_{12} + A_{13} \cdot \delta a_{13} = \delta^2. \end{aligned}$$

Za krivulju 2. razreda s jednadžbom (4) kaže se da je *regularna* ili *singularna* ovisno o tome je li $\delta' \neq 0$ ili $\delta' = 0$. Krivulja 2. razreda pridružena regularnoj konici (1) jest regularna.
Zbog simetričnosti formula (3) i (5) (do na faktor proporcionalnosti δ) slijedi da su pojmovi krivulje 2. reda i krivulje 2. razreda dualni pa se krivulji 2. razreda s jednadžbom (4) može pridružiti krivulja 2. reda i to baš konika (1).
U sljedećim promatranjima bit će nam važni pojmovi *pola* i *polare.* Promatrajmo točku $T_0 = (x_0 : y_0 : z_0)$ projektivne ravnine i koniku zadanu s (1). Polara točke T_0 s obzirom na koniku (1) pravac je s jednadžbom

$$a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{33}z_0z + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{13}(x_0z + z_0x) + a_{23}(y_0z + z_0y) = 0. \quad (7)$$

S druge strane, pol pravca (7) točka je T_0. Ako točka T_0 leži izvan konike, onda iz nje možemo povući dvije tangente na tu koniku. Spojnica dirališta tih tangenata polara je točke T_0. Ako točka T_0 pripada konici, onda tangenta na koniku u toj točki je ujedno i polara te točke.

Iz gornje jednadžbe vidimo da jedna točka leži na polari druge ako i samo ako druga točka leži na polari prve.



Slika 1. Lijevo: konika kao skup točaka dana jednadžbom oblika $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$.
Desno: konika kao skup pravaca dana jednadžbom oblika $A_{11}X^2 + A_{22}Y^2 + A_{33}Z^2 + 2A_{12}XY + 2A_{13}XZ + 2A_{23}YZ = 0$.

3. Klasifikacija konika u izotropnoj ravnini

Konika $\mathcal{C}$ s jednadžbom (1) ima jednadžbu u nehomogenim koordinatama u izotropnoj ravnini danu s

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{8}$$

Kako bismo klasificirali konike s obzirom na njihov položaj u odnosu na apsolutnu figuru, tj. kako bismo odredili sjecišta konike s apsolutnim pravcem, za koniku koristimo jednadžbu (1). Konika $\mathcal{C}$ s jednadžbom (1) ima s apsolutnim pravcem $z = 0$ zajedničke točke za koje vrijedi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \tag{9}$$

tj. (9) je kvadratna jednadžba za omjer $x : y$. Diskriminanta te jednadžbe jest

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -A_{33}.$$

Regularnu koniku $\mathcal{C}$ zvat ćemo *elipsom* ako nema zajedničkih točaka s apsolutnim pravcem, a uvjet za to je $A_{33} > 0$. Tu ćemo koniku zvati *hiperbolom* ako ima dvije različite zajedničke točke s apsolutnim pravcem, a uvjet za to je $A_{33} < 0$. Posebno, hiperbola je *specijalna* ako prolazi kroz apsolutnu točku, a uvjet za to je $a_{22} = 0$.

Konika $\mathcal{C}$ zvat će se *kružnica* ako s apsolutnim pravcem ima dvije zajedničke točke u apsolutnoj točki, a uvjet za to je da uz $a_{22} = 0$ u (9) vrijedi i jednakost $a_{12} = 0$. Zato kružnica ima u afinim koordinatama jednadžbu oblika

$$a_{11}x^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + a_{33} = 0, \quad a_{11} \neq 0. \tag{10}$$

Za nju je prema (2)

$$\delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = -a_{11}{a_{23}}^2.$$

Ona je zato regularna ili singularna ovisno o tome je li $a_{23} \neq 0$ ili $a_{23} = 0$. U oba slučaja jednadžba (10) može se pisati u obliku

$$ky = x^2 + ux + w \tag{11}$$

gdje je

$$k = -\frac{2a_{23}}{a_{11}}, \quad u = \frac{2a_{13}}{a_{11}}, \quad w = \frac{a_{33}}{a_{11}}$$

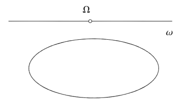
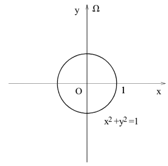
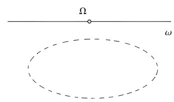
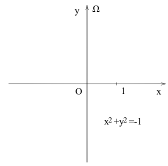
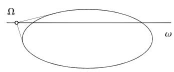
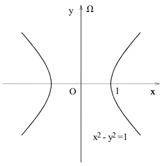
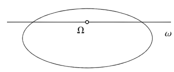
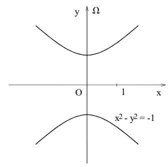
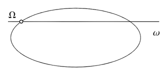
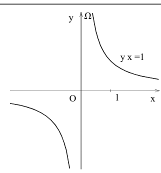
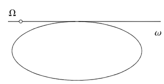
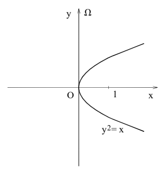
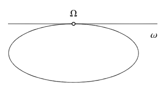
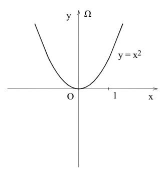
te predstavlja (regularnu) kružnicu ako je $k \neq 0$ i singularnu kružnicu (par izotropnih pravaca) ako je $k = 0$.

Regularna konika $\mathcal{C}$ je *parabola* ako dira apsolutni pravac u točki, koja nije apsolutna, a uvjet za to je da je $A_{33} = 0$ i $a_{22} \neq 0$.

Dakle, regularna konika (1) je elipsa ako je $A_{33} > 0$, hiperbola ako je $A_{33} < 0$, a parabola ili kružnica ako je $A_{33} = 0$. Ovaj se kriterij za broj izotropnih točaka konika može proširiti i na singularne konike. Singularna konika (1) je par neparalelnih pravaca ako je $A_{33} < 0$, par paralelnih pravaca ako je $A_{33} = 0$ ili jedna prava točka ako je $A_{33} > 0$. Pokazalo se da (singularna) konika može biti skup od samo jedne točke. Može li (regularna) konika (1) biti prazan skup? U obzir dolazi samo elipsa i takva se elipsa, ako postoji, zove *imaginarna elipsa*. Može se pokazati da je regularna konika s jednadžbama (1) i (4) imaginarna elipsa ako i samo ako su brojevi $\delta a_{11}, \delta a_{22}$, δa_{33}, A_{11}, A_{22}, A_{33} definirani s (2) i (3) ili sa (6) i (5) pozitivni.

S obzirom na dobivene rezultate, regularne konike klasificirane su na sljedeći način:

- elipsa: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
- hiperbola: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
- specijalna hiperbola: $a_{22} = 0$
- parabola: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
- kružnica: $a_{22} = a_{12} = 0$.

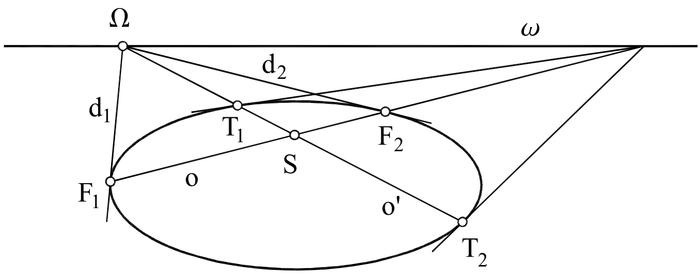
	projektivan model	afin model
elipsa		
imaginarna elipsa		
hiperbola 1. vrste		
hiperbola 2. vrste		
specijalna hiperbola		
parabola		
kružnica		

Tablica 1.

4. Središte, os, žarišta i ravnalice konika

U ovom ćemo poglavlju definirati pojmove središta, osi, žarišta (fokusa) i ravnalica (direktrisa) konika kao što je to napravljeno u [1].

Pol apsolutnog pravca $(0 : 0 : 1)$ s obzirom na danu regularnu koniku nazivamo *središtem* te konike, a polare izotropnih točaka prolaze kroz središte i zovu se *promjeri* te konike.
Središte parabole njezina je jedina izotropna točka pa su njezini promjeri međusobno paralelni. Središte elipse ili hiperbole jest neizotropna točka. Kako je apsolutni pravac, vanjski pravac elipse, to je njezino središte njezina unutrašnja točka pa središte ne leži ni na jednoj tangenti elipse. Hiperboli je apsolutni pravac sekanta pa joj je središte vanjska točka i kroz nju prolaze dvije tangente hiperbole s diralištima na polari središta, tj. na apsolutnom pravcu. To znači da je središte hiperbole sjecište njezinih tangenata u njezine dvije izotropne točke. Te dvije tangente hiperbole s izotropnim diralištima zovu se *asimptote* hiperbole. Posebno, specijalna hiperbola ima jednu izotropnu asimptotu i još jednu neizotropnu asimptotu.



Slika 2. Elipsa sa središtem S, osi o, fokusima F_1 i F_2, direktrisama d_1 i d_2, sporednom osi o' i tjemenima T_1 i T_2 prikazana na projektivnom modelu izotropne ravnine.

Teorem 1. *Središte elipse ili hiperbole s jednadžbom*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy + a_{33} = 0 \tag{12}$$

jest točka

$$S = \left(\frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \frac{a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right). \tag{13}$$

Parabola s jednadžbom (12) ima za izotropnu točku izotropnu točku pra-

vaca s koeficijentom

$$\frac{a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}.$$

Dokaz. Prema (7) polara točke $S = \left(\frac{A_{13}}{A_{33}}, \frac{A_{23}}{A_{33}}\right)$ s obzirom na koniku (12) jest pravac $z = 0$. Naime, prikažemo li točku S u homogenim koordinatama $S = \left(\frac{A_{13}}{A_{33}} : \frac{A_{23}}{A_{33}} : 1\right)$ i uvrstimo u jednadžbu (7) dobijemo

$$\begin{aligned} & a_{11}\frac{A_{13}}{A_{33}}x + a_{22}\frac{A_{23}}{A_{33}}y + a_{33}z + a_{12}\left(\frac{A_{13}}{A_{33}}y + \frac{A_{23}}{A_{33}}x\right) \\ & + a_{13}\left(\frac{A_{13}}{A_{33}}z + x\right) + a_{23}\left(\frac{A_{23}}{A_{33}}z + y\right) \\ & = 0, \end{aligned}$$

odnosno, nakon množenja s A_{33}

$$\begin{aligned} & a_{11}A_{13}x + a_{22}A_{23}y + a_{33}A_{33}z + a_{12}A_{23}x + a_{12}A_{13}y \\ & + a_{13}A_{13}z + a_{13}A_{33}x + a_{23}A_{33}y + a_{23}A_{23}z \\ & = 0, \end{aligned}$$

i korištenja jednakosti (3)

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{12}^2a_{33} - a_{13}^2a_{22} - a_{11}a_{23}^2)z = 0.$$

Dakle, točka S pol je apsolutnog pravca, odnosno središte konike (12) ako je $A_{33} \neq 0$, tj. ako je ta konika elipsa ili hiperbola. Analogno se pokazuje da ako je $A_{33} = 0$, tj. ako je konika parabola, tada je taj pol izotropna točka pravaca s koeficijentom smjera $\dfrac{A_{23}}{A_{13}}$. □

Središtu konike kao polu apsolutnog pravca dualan je pojam *(glavne) osi* konike kao polare apsolutne točke. Očito os konike prolazi kroz njezino središte. Eventualna sjecišta konike s njezinom osi fokusi su te konike pa je pojam fokusa dualan pojmu asimptote. Tangente u fokusima su izotropni pravci, direktrise te konike. Taj pojam dualan je pojmu izotropne točke konike.

Teorem 2. *Konika s jednadžbom*

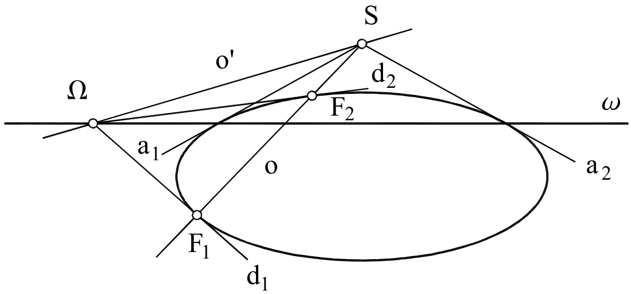
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

ima os s jednadžbom

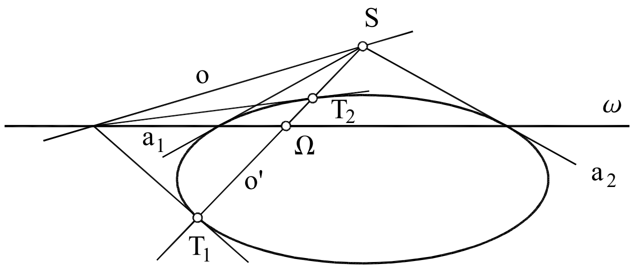
$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \tag{14}$$

a apscise njezinih fokusa rješenja su po x jednadžbe

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})x^2 + 2(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})x + {a_{23}}^2 - a_{22}a_{33} = 0. \tag{15}$$



Slika 3. Hiperbola 1. vrste sa središtem S, osi o, fokusima F_1 i F_2, direktrisama d_1 i d_2, sporednom osi o' i asimptotama a_1 i a_2 prikazana na projektivnom modelu izotropne ravnine.



Slika 4. Hiperbola 2. vrste sa središtem S, osi o, sporednom osi o', tjemenima T_1 i T_2 i asimptotama a_1 i a_2 prikazana na projektivnom modelu izotropne ravnine.

Dokaz. Os konike (12), tj. polara apsolutne točke, jest pravac s jednadžbom (14). Naime, prema (7) polara točke $\Omega = (0 : 1 : 0)$ pravac je koji u homogenim koordinatama ima jednadžbu

$$a_{11}\cdot 0\cdot x + a_{22}\cdot 1\cdot y + a_{33}\cdot 0\cdot z + a_{12}(0\cdot y + 1\cdot x) + a_{13}(0\cdot z + 0\cdot x) + a_{23}(1\cdot z + 0\cdot y) = 0,$$

tj.

$$a_{22}y + a_{12}x + a_{23}z = 0,$$

odnosno u nehomogenim koordinatama jednadžbu

$$a_{22}y + a_{12}x + a_{23} = 0.$$

Par direktrisa konike (12) ima jednadžbu $A_{33}x^2 - 2A_{13}x + A_{11} = 0$ koja zbog (3) dobiva oblik (15). To je ujedno jednadžba za apscise fokusa te konike. $\square$

Korolar 3. *Parabola s jednadžbom*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy = 0$$

ima direktrisu s jednadžbom

$$2(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13})x + {a_{23}}^2 - a_{22}a_{33} = 0. \tag{16}$$

Kako za parabolu vrijedi $A_{33} = 0$, tada u pravčastim koordinatama njena jednadžba ima oblik

$$A_{11}X^2 + 2A_{13}XY - 2A_{12}X - 2A_{23}Y + A_{22} = 0.$$

Iz (16), a zbog (3), jednadžba direktrise parabole može se zapisati i u obliku

$$x = \frac{A_{11}}{2A_{13}}.$$

Jednadžba konike u točkovnim koordinatama oblika je

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy + a_{33} = 0.$$

Uvrštavanjem (5) u gornju jednadžbu dobije se

$$\begin{aligned}&-A_{23}^2x^2 - A_{13}^2y^2 + A_{11}A_{22} - A_{12}^2 + 2(A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23})y\\ &+2(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})x + 2A_{23}A_{13}xy\\ &=0.\end{aligned} \tag{17}$$

Fokus parabole ima apscisu $x = \dfrac{A_{11}}{2A_{13}}$, a ordinatu ćemo dobiti iz (17) uvrštavanjem te apscise. Pritom se dobije da vrijedi

$$4{A_{13}}^4y^2 - 4{A_{13}}^2(2A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23})y + {A_{23}}^2{A_{11}}^2 + 4A_{12}^2{A_{13}}^2 - 4A_{13}A_{12}A_{23}A_{11} = 0,$$

odnosno,

$$(2A_{13}^2y - 2A_{13}A_{12} + A_{11}A_{23})^2 = 0.$$

Dakle, koordinate fokusa parabole jesu

$$x = \frac{A_{11}}{2A_{13}}, \quad y = \frac{2A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23}}{2{A_{13}}^2}. \tag{18}$$

Jednadžba (15) pisana u obliku

$$A_{33}x^2 - 2A_{13}x + A_{11} = 0 \tag{19}$$

ima zbog (5) diskriminantu

$$ {A_{13}}^2 - A_{11}A_{33} = -\delta a_{22}. \tag{20} $$

U slučaju elipse, koja nije imaginarna, vrijedi ili $\delta a_{22} < 0$ ili pak $A_{11} < 0$, a tada zbog $A_{33} > 0$ slijedi ${A_{13}}^2 - A_{11}A_{33} > 0$, tj. opet $\delta a_{22} < 0$. Zato je kod takve elipse diskriminanta (20) uvijek pozitivna i ta elipsa ima dva fokusa. Za hiperbolu (1) postoje dvije mogućnosti. Razlikuje se *hiperbola 1. vrste* (hiperbola s fokusima) i *hiperbola 2. vrste* (hiperbola s tjemenima).

Korolar 4. *Hiperbola s jednadžbom*

$$ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy + a_{33} = 0 $$

ima dva fokusa ako je $\delta a_{22} < 0$*, a nema fokusa ako je* $\delta a_{22} > 0$*, gdje je broj* $\delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}{a_{23}}^2 - a_{22}{a_{13}}^2 - a_{33}a_{12}^2$.

Izotropni pravac kroz središte elipse ili hiperbole $\mathcal{C}$ zove se *sporedna os* te konike, a to je zapravo polara izotropne točke (glavne) osi. Eventualna sjecišta te konike s njezinom sporednom osi njezina su *tjemena*, a to su zapravo dirališta tangenata te konike paralelnih s njezinom (glavnom) osi. Tangente u tjemenima konike paralelne su s njezinom (glavnom) osi i nazivamo ih *tjemenim tangentama* konike.
Polovina udaljenosti fokusa konike naziva se *velika poluos* te konike, a polovina raspona tjemena *mala poluos* promatrane konike.

Teorem 5. *Elipsa ili hiperbola s jednadžbom*

$$ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy + a_{33} = 0 $$

ima veliku poluos α *i malu poluos* β *dane formulama*

$$ \alpha^2 = -\frac{\delta a_{22}}{A_{33}^2}, \quad \beta^2 = -\frac{\delta}{a_{22}A_{33}} \tag{21} $$

gdje je $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ *i* $\delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}{a_{23}}^2 - a_{22}{a_{13}}^2 - a_{33}a_{12}^2$.

Dokaz. Ako su x_1, x_2 rješenja jednadžbe (19), tada je

$$ x_1 + x_2 = \frac{2A_{13}}{A_{33}}, \quad x_1x_2 = \frac{A_{11}}{A_{33}} $$

i zato je zbog (5) dalje

$$ \begin{aligned} 4\alpha^2 &= (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= \frac{4A_{13}^2}{A_{33}^2} - \frac{4A_{11}}{A_{33}} = \frac{4}{A_{33}^2}({A_{13}}^2 - A_{11}A_{33}) = -\frac{4\delta a_{22}}{A_{33}^2}. \end{aligned} $$

Sporedna os konike (12) jest izotropni pravac kroz njezino središte i ima po teoremu 1 jednadžbu $x = \dfrac{A_{13}}{A_{33}}$. Uz ovu vrijednost x iz (12) slijedi jednadžba

$$a_{22}y^2 + 2y\left(a_{12}\frac{A_{13}}{A_{33}} + a_{23}\right) + a_{11}\frac{{A_{13}}^2}{A_{33}^2} + 2a_{13}A_{13}A_{33} + a_{33} = 0.$$

Za njena rješenja y_1, y_2 vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= -\frac{2}{a_{22}A_{33}}\left(a_{12}A_{13} + a_{23}A_{33}\right), \\ y_1y_2 &= \frac{1}{a_{22}A_{33}^2}\left(a_{11}{A_{13}}^2 + 2a_{13}A_{13}A_{33} + a_{33}A_{22}^2\right) \end{aligned}$$

i zato zbog (5) slijedi

$$\begin{aligned} 4\beta^2 &= (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2 \\ &= \frac{4}{a_{22}^2A_{33}^2}\left[(a_{12}A_{13} + a_{23}A_{33})^2 - a_{22}\left(a_{11}{A_{13}}^2 + 2a_{13}A_{13}A_{33} + a_{33}A_{33}^2\right)\right] \\ &= -\frac{4\delta}{a_{22}A_{33}}. \end{aligned}$$

□

Kod elipse je $A_{33} > 0$, $\delta a_{22} < 0$ i zato je $\alpha^2 > 0$ i $\beta^2 > 0$ i ona ima dva fokusa i dva tjemena. Kod hiperbole je $A_{33} < 0$. Ako je to hiperbola 1. vrste, tada je $\delta a_{22} < 0$ i zato je $\alpha^2 > 0$ i $\beta^2 < 0$ pa ona nema tjemena. Za hiperbolu 2. vrste je $\delta a_{22} > 0$ pa zato iz (21) slijedi $\alpha^2 < 0$ i $\beta^2 > 0$ i ta hiperbola ima tjemena.
Jednadžba (9) pisana u obliku

$$a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{y}{x} + a_{11} = 0 \tag{22}$$

jest kvadratna jednadžba za koeficijente k_1 i k_2 smjera asimptota hiperbole s jednadžbom (12). Zato je

$$k_1 + k_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{22}}, \quad k_1k_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}$$

pa je kvadrat kuta između tih asimptota jednak

$$(k_1 - k_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2 = \frac{4}{a_{22}^2}(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = -\frac{4A_{33}}{a_{22}^2}.$$

Stoga slijedi:

Teorem 6. *Hiperbola s jednadžbom*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

ima kut između asimptota jednak $\frac{2}{a_{22}}\sqrt{-A_{33}}$, *gdje je* $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

U slučaju specijalne hiperbole vrijedi $a_{22} = 0$ i jednadžba (22) ima jedno rješenje $k = \infty$, a drugo je rješenje $k = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}$. Zbog $a_{22} = 0$ središte je sada

$$S = \left(-\frac{a_{23}}{a_{12}}, \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}}{a_{12}^2}\right), \tag{23}$$

uz $a_{12} \neq 0$ pa izotropna asimptota ima jednadžbu $x = -\frac{a_{23}}{a_{12}}$, a neizotropna asimptota ima jednadžbu

$$y - \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}}{a_{12}^2} = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}\left(x + \frac{a_{23}}{a_{12}}\right),$$

tj. jednadžbu

$$y = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}x + \frac{a_{11}a_{23} - 2a_{13}a_{12}}{2a_{12}^2}. \tag{24}$$

Time je dokazan sljedeći teorem:

Teorem 7. *Specijalna hiperbola s jednadžbom*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad a_{12} \neq 0,$$

ima središte $S = \left(-\frac{a_{23}}{a_{12}}, \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}}{a_{12}^2}\right)$, *izotropnu asimptotu s jednadžbom* $x = -\frac{a_{23}}{a_{12}}$ *i neizotropnu asimptotu s jednadžbom* $y = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}x + \frac{a_{11}a_{23} - 2a_{13}a_{12}}{2a_{12}^2}$.

Uočimo da su međusobno dualni pojmovi hiperbole s tjemenima i (neimaginarne) elipse te specijalna hiperbola i parabola, a sami su sebi dualni pojmovi hiperbola s fokusima, imaginarna elipsa i kružnica.

Potpuna klasifikacija regularnih konika

elipsa (neimaginarna)	bez izotropnih točaka, dvije različite direktrise dva različita fokusa, dva različita tjemena
imaginarna elipsa	bez izotropnih i bilo kojih drugih točaka, bez direktrisa i bilo kojih drugih tangenata
hiperbola 1. vrste	dvije različite izotropne točke, dvije različite direktrise, dva različita fokusa
hiperbola 2. vrste	dvije različite izotropne točke, nema direktrisa, ima dva različita tjemena
specijalna hiperbola	osim apsolutne točke ima još jednu izotropnu točku
parabola	osim apsolutnog pravca dira još jedan izotropni pravac, svoju direktrisu u svojem fokusu
kružnica	u apsolutnoj točki dira apsolutni pravac

Tablica 2.

Literatura

[1] J. Beban-Brkić, V. Volenec, M. Šimić, *On foci and asymptotes of conics in the isotropic plane*, Sarajevo Journal of Mathematics, **3**(16) (2007), 257–266.

[2] I. Čatipović, E. Jurkin, Ž. Milin Šipuš, *O trokutu i kružnici u izotropnoj ravnini*, Acta mathematica Spalatensia. Series didactica, **3** (2020), 13–23.

[3] R. Kolar-Šuper, Z. Kolar-Begović, V. Volenec, J. Beban-Brkić, *Metrical relationships in a standard triangle in an isotropic plane*, Mathematical Communications, **10** (2005), 149–157.

[4] H. Sachs, *Ebene Isotrope Geometrie*, Wieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1987.

Vladimir Volenec
Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, Hrvatska

Marija Šimić Horvath
Sveučilište u Zagrebu Arhitektonski fakultet, Zagreb, Hrvatska
E-mail: `marija.simic@arhitekt.unizg.hr`

Ema Jurkin
Sveučilište u Zagrebu Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zagreb, Hrvatska
E-mail: `ema.jurkin@rgn.unizg.hr`