

Lorentzove transformacije na prostoru Minkowskog

Tea Martinić Bilać, Dominik Neno Burić

Sažetak

Cilj ovog rada je istražiti osnovne pojmove vezane uz četverodimenzionalni pseudo-euklidski prostor kojeg nazivamo prostor Minkowskog, a koji predstavlja prikladan matematički okvir za formulaciju specijalne teorije relativnosti gdje zanemarujemo utjecaj gravitacije. Njegove elemente nazivamo događajima, a s obzirom da kvadratna norma može biti negativna, nula ili pozitivna dijelimo ih na vremenske, svjetlosne i prostorne. Poseban naglasak u radu stavljen je na Lorentzove transformacije, tj. linearne operatore koji povezuju različite inercijske referentne sustave na način da čuvaju prostorno-vremenski interval između događaja i njihovu vremensku i prostornu orijentaciju. Ovaj rad temelji se na završnom radu D.N. Burić [1].

Ključni pojmovi: pseudo-euklidski prostor, bilinearna forma, kvadratna forma, prostorno-vremenske koordinate, svjetlosni stožac, inercijski referentni sustavi, ortogonalni operatori, ortokronske transformacije

Math. Subj. Class.:

1 Uvod

U ovom radu dat ćemo uvid u osnovne pojmove prostora Minkowskog koji predstavlja najprikladniji matematički model za formulaciju specijalne teorije relativnosti koju je 1905. godine objavio Albert Einstein. Specijalna teorija relativnosti se temelji na dva fundamentalna principa gdje se prvi odnosi na

nepromjenjivost fizikalnih zakona za sve promatrače u inercijskim referentnim sustavima (jedan u odnosu na drugog se gibaju pravocrtno i konstantnom brzinom), dok se drugi odnosi na konstantnost brzine svjetlosti c u vakuumu za sve promatrače bez obzira na gibanje izvora svjetlosti ili promatrača. Postulati specijalne teorije relativnosti vode do raznih fizikalnih fenomena kao što su dilatacija vremena gdje promatrač opaža da je sat u relativnom gibanju u odnosu na njega sporiji nego kad miruje te kontrakcija duljine gdje se duljina objekta u relativnom gibanju skraćuje za promatrača. Za opis navedenih postulata i njihovih posljedica potrebno je naći prikladan matematički okvir gdje klasično poimanje apsolutnog prostora i protoka vremena koji je isti za sve promatrače treba zamijeniti relativnim. Potaknut eksperimentalnim neuspjesima za potvrdu apsolutnog gibanja, Hermann Minkowski predlaže model koji ujedinjuje trodimenzionalni prostor i vrijeme u jedinstveni kontinuum kojeg nazivamo prostor-vrijeme [2]. U prostor-vremenu promatrači iz različitih inercijskih referentnih sustava mogu mjeriti drugačije koordinate vremena i prostora za pojedine događaje, ali prostorno-vremenski interval između događaja mora ostati konstantan za sve promatrače bez obzira na njihovo relativno gibanje. Ideja o protoku vremena i univerzalnom satu u svemiru više ne postoji u prostoru-vremenu Minkowskog te su sva gibanja relativna s obzirom na odabrani inercijski referentni sustav, tj. ne postoji apsolutni referentni sustav u svemiru. Sa svojom idejom Minkowski je demonstrirao kako moć matematičkog razmišljanja primjenjenog na neriješene fizikalne probleme može dovesti do razbijanja dubokih uvjerenja kojima su se znanstvenici do tada vodili. Iako je u početku osporavao ideju svog profesora matematike Minkowskog, u konačnici i Albert Einstein zaključuje da je prirodnije o fizikalnoj stvarnosti razmišljati kao četverodimenzionalnom prostoru nego kao vremenskoj evoluciji trodimenzionalnog prostora te na njegovoj ideji temelji svoju revolucionarnu teoriju gravitacije kao zakrivljenosti prostor-vremena [3]. Naš cilj u ovom radu je dati uvid u matematički formalizam prostora Minkowskog i Lorentzovih transformacija. S matematičkog aspekta, prostor Minkowskog je četverodimenzionalni vektorski prostor gdje je trima prostornim koordinatama pridružena četvrta vremenska koordinata. Prostor-vrijeme najčešće vizualiziramo trodimenzionalnim (dvodimenzionalnim) dijagramom čija vertikalna os predstavlja vrijeme i skalirana je sa ct , tako da sve koordinate budu izražene u jedinicama duljine, dok horizontalna ravnina (horizontalna os) predstavlja položaj objekta ili događaja u dvije (jednoj) dimenziji prostora. Nadalje, prostor Minkowskog je pseudo-euklidski prostor stoga ćemo u drugom poglavlju dati kratak uvid u pseudo-euklidske prostore

te generalizirati pojam skalarnog produkta. U trećem poglavlju proučavat ćemo prostor Minkowskog kao poseban primjer pseudo-euklidskog prostora gdje ćemo definirati vremenske, svjetlosne i prostorne vektore te proučiti njihova elementarna svojstva. Konačno, u četvrtom poglavlju proučavat ćemo Lorentzove transformacije koje predstavljaju temeljni koncept u prostorno-vremenu jer povezuju različite inercijske referentne sustave na način da prostorno-vremenski interval ostane očuvan te time omogućuju formulaciju specijalne teorije relativnosti i njezinih posljedica.

2 Pseudo-euklidski prostor

Definicija 1. *Neka je V vektorski prostor dimenzije $n \geq 1$ nad poljem realnih brojeva \mathbb{R} . **Bilinearna forma** na V je preslikavanje $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ takvo da vrijedi*

1. $g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 g(v_1, w) + \alpha_2 g(v_2, w)$
2. $g(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 g(v, w_1) + \alpha_2 g(v, w_2), \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall v, w_i \in V, i = 1, 2.$

Kažemo da je bilinearna forma preslikavanje linearno u obje varijable. Za bilinearnu formu g kažemo da je **simetrična** ako vrijedi $g(v, w) = g(w, v), \forall v, w \in V$, a **nedegenerirana** ako iz $g(v, w) = 0, \forall w \in V$ slijedi da je $v = 0$. Nedegeneriranu simetričnu bilinearnu formu općenito nazivamo skalarnim produktom te njenu sliku označavamo sa $g(v, w) = v \cdot w$.

Primjer 2. *Neka su $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Jedan od najjednostavnijih primjera simetrične, nedegenerirane bilinearne forme je standardni skalarni produkt na \mathbb{R}^n definiran sa*

$$\langle x | y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Par $(\mathbb{R}^n, \langle | \rangle)$ nazivamo standardni n -dimenzionalni realni unitarni prostor ili euklidski prostor. Prisjetimo se da je standardni skalarni produkt (1) **pozitivno definitan**, tj. za svaki $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da je $\langle x | x \rangle > 0$.

Iz Definicije (1) vidimo da općenito ne moraju svi skalarni produkti biti pozitivno definitni, tj. zadovoljavati svojstvo da za svaki $v \neq 0$ vrijedi da je

$g(v, v) > 0$. Za skalarni produkt g za koji $v \neq 0$ implicira da je $g(v, v) < 0$ kažemo da je **negativno definitan**, dok za g koji nije ni pozitivno ni negativno definitan kažemo da je **neodređen**.

Primjer 3. Neka su $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ i neka je $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definirano sa

$$g(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_{n-1}w_{n-1} - v_nw_n. \quad (2)$$

Pokažimo da je prethodno definirano preslikavanje (2) nedegenerirana simetrična bilinearna forma. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v, v', w \in \mathbb{R}^n$. Koristeći svojstva distributivnosti i asocijativnosti standardnog množenja i zbrajanja u \mathbb{R} imamo da je

$$\begin{aligned} g(\alpha v + \beta v', w) &= (\alpha v_1 + \beta v'_1)w_1 + \dots + (\alpha v_{n-1} + \beta v'_{n-1})w_{n-1} - (\alpha v_n + \beta v'_n)w_n \\ &= (\alpha v_1w_1 + \beta v'_1w_1) + \dots + (\alpha v_{n-1}w_{n-1} + \beta v'_{n-1}w_{n-1}) - (\alpha v_nw_n + \beta v'_nw_n) \\ &= \alpha(v_1w_1 + \dots + v_{n-1}w_{n-1} - v_nw_n) + \beta(v'_1w_1 + \dots + v'_{n-1}w_{n-1} - v'_nw_n) \\ &= \alpha g(v, w) + \beta g(v', w). \end{aligned}$$

Analogno se pokaže i da vrijedi da je $g(v, \alpha w + \beta w') = \alpha g(v, w) + \beta g(v, w')$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v, w, w' \in \mathbb{R}^n$, iz čega slijedi da je zadano preslikavanje bilinearna forma.

Neka je sada $g(v, w) = 0$, odnosno

$$g(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_{n-1}w_{n-1} - v_nw_n = 0, \forall w \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

S obzirom da gornja relacija vrijedi $\forall w \in \mathbb{R}^n$, posebno vrijedi i za vektore standardne baze $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, gdje je $e_i \in \mathbb{R}^n$ vektor kojemu su sve koordinate 0 osim na i -tom mjestu gdje je 1. Uvrštavajući ih u gornju relaciju imamo da je $g(v, e_i) = v_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$, iz čega slijedi da je $v = 0$, čime smo pokazali da je bilinearna forma nedegenerirana.

Konačno, iz komutativnosti standardnog množenja na \mathbb{R} slijedi simetričnost bilinearne forme jer imamo da je

$$\begin{aligned} g(v, w) &= v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_{n-1}w_{n-1} - v_nw_n \\ &= w_1v_1 + w_2v_2 + \dots + w_{n-1}v_{n-1} - w_nv_n \\ &= g(w, v), \forall v, w \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Uzmimo za primjer vektore $v = (0, 0, \dots, 1), w = (1, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Primijetimo da su $v, w \neq 0$, a $g(v, v) = -1 < 0$ i $g(w, w) = 0$.

Generalizirajmo sada i pojam ortogonalnosti s obzirom na danu bilinearnu nedegeneriranu simetričnu formu g koju ćemo u daljnjem tekstu nazivati skalarnim produktom.

Definicija 4. *Neka je g skalarni produkt na vektorskom prostoru V . Za vektore $u, w \in V$ kažemo da su g -ortogonalni ako je $g(u, w) = 0$. Neka je W potprostor od V . Tada ortogonalni komplement W^\perp od W definiramo sa $W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$.*

Lako se pokaže da je, i u slučaju općeg skalarnog produkta g , W^\perp potprostor od V .

Definicija 5. *Kvadratna forma* pridružena skalarnom produktu g na V je preslikavanje $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definirano sa $Q(v) = g(v, v) = v \cdot v$ (često označeno v^2). Vektori $v \in V$ za koje vrijedi da je $Q(v) = 1$ ili $Q(v) = -1$ nazivaju se jedinični vektori, a baza $\{e_1, \dots, e_n\}$ u V koja se sastoji od međusobno ortogonalnih i jediničnih vektora naziva se ortonormalna baza za V .

Sada ćemo navesti teorem koji nam osigurava egzistenciju takve baze, a čiji se dokaz nalazi u [4].

Teorem 6. *Neka je V n -dimenzionalni realni vektorski prostor na kojem je definirana nedegenerirana simetrična bilinearna forma $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Tada postoji baza $\{e_1, \dots, e_n\}$ takva da je $g(e_i, e_j) = 0$, za $i \neq j$ i $Q(e_i) = \pm 1, \forall i = 1, \dots, n$. Broj vektora e_i za koje vrijedi $Q(e_i) = -1$ je isti u svakoj takvoj bazi i nazivamo ga indeksom od g .*

Neka je r indeks od g . Tada ćemo svaku ortonormalnu bazu za V pisati u poretku

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\},$$

gdje je $Q(e_i) = 1$ za $i = 1, 2, \dots, n - r$ i $Q(e_i) = -1$, za $i = n - r + 1, \dots, n$. Sada s obzirom na prethodnu bazu imamo da je

$$g(v, w) = v_1 w_1 + \dots + v_{n-r} w_{n-r} - v_{n-r+1} w_{n-r+1} - \dots - v_n w_n, \quad (4)$$

gdje su $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ i $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$.

Kvadratna forma pridružena vektoru $v \in V$ je dana sa

$$Q(v) = (v_1^2 + \dots + v_{n-r}^2) - (v_{n-r+1}^2 + \dots + v_n^2). \quad (5)$$

Realni vektorski prostor dimenzije n gdje je kvadratna forma definirana s (5) označavamo sa \mathbb{R}_r^n i nazivamo pseudo-euklidski prostor.

Prirodno nas zanima na koji način možemo mjeriti duljinu vektora u \mathbb{R}_r^n , a posebno u prostoru Minkowskog gdje želimo mjeriti i vremensku duljinu nekog događaja te vremenski razmak između dva događaja. Podsjetimo se da je u standardnom euklidskom prostoru \mathbb{R}^n danom u Primjeru (2) dobro definiran broj $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ kojeg nazivamo norma ili duljina vektora $x \in \mathbb{R}^n$. Iz prethodnog smo vidjeli da u pseudo-euklidskom prostoru općenito ne vrijedi pozitivna definitnost skalarnog produkta, stoga normu ne možemo definirati kao u standardnom euklidskom prostoru. Međutim, ukoliko uzmemo apsolutnu vrijednost kvadratne forme od $v \in \mathbb{R}_r^n$ onda **pseudo-normu** možemo definirati sa

$$\|v\|_r = \sqrt{|Q(v)|}, \quad v \in \mathbb{R}_r^n. \quad (6)$$

Prisjetimo se još i da preslikavanje $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ima svojstva:

- 1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, (pozitivna definitnost),
- 2) $\|x\| = 0, \iff x = 0$ (strogost),
- 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, (homogenost),
- 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in U$, (nejednakost trokuta).

Nadalje, za svaki $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi Cauchy-Schwartz-Bunjakovski nejednakost tj. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni vektori.

Posebno, s obzirom na standardni skalarni produkt (1) u \mathbb{R}^n , C-S-B nejednakost je oblika

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Za pseudo-normu se lako pokaže da vrijede svojstva pozitivne definitnosti i homogenosti, dok svojstva strogosti i nejednakosti trokuta općenito ne vrijede. Naime, $\|v\|_r = 0 \iff Q(v) = 0$, a u primjeru (3) smo vidjeli da u pseudo-euklidskom prostoru može vrijediti $Q(v) = 0$ za $v \neq 0$. Također, u sljedećem poglavlju ćemo pokazati da za vektore $v \in \mathbb{R}_1^4$ za koje vrijedi $Q(v) < 0$ ne vrijedi C-S-B nejednakost, a time ni nejednakost trokuta.

3 Prostor Minkowskog

Definicija 7. *Prostor Minkowskog* je četverodimenzionalni realni vektorski prostor M na kojem je definirana nedegenerirana simetrična bilinearna forma g indeksa 1. Elemente prostora M nazivamo događajima, a g Lorentzovim skalarnim produktom.

Iz prethodne definicije slijedi da postoji ortonormalna baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ u M takva da vrijedi

$$g(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 - v_4w_4, \quad (8)$$

gdje su $v = \sum_{i=1}^4 v_i e_i$ i $w = \sum_{i=1}^4 w_i e_i$. Zbog jednostavnosti zapisa definirajmo matricu $\eta = [\eta_{ij}]$ reda 4×4 sa

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sada pomoću gornje matrice možemo zapisati $g(e_i, e_j) = \eta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. te

$$g(v, w) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \eta_{ij} v_i w_j. \quad (9)$$

Ortonormalna baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ predstavlja referentni sustav za promatranje događaja u svemiru te ako $x \in M$ ima prikaz u toj bazi $x = x_1 e_1 + \dots + x_4 e_4$, onda koordinate (x_1, x_2, x_3) nazivamo prostornim koordinatama događaja, a koordinatu x_4 vremenskom koordinatom događaja.

U poglavlju (2) smo vidjeli da, s obzirom da Lorentzov skalarni produkt g na M nije pozitivno definitan, postoje vektori $v \neq 0$ u M takvi da je $g(v, v) = 0$ i $g(v, v) < 0$. Prethodno nam omogućuje da u \mathbb{R}_1^4 razlikujemo sljedeća tri tipa vektora:

1. **Prostorni vektor** je vektor v za kojeg vrijedi $Q(v) > 0$.
2. **Nulti ili svjetlosni vektor** je vektor v za kojeg vrijedi $Q(v) = 0$.
3. **Vremenski vektor** je vektor v za kojeg vrijedi $Q(v) < 0$.

Da bismo mogli analizirati uzročno-posljedičnu vezu dva različita događaja x i x_0 iz M , i time opravdati nazive vektora u prethodnoj klasifikaciji te dati njihovu fizikalnu interpretaciju, potrebno je proučiti vektor $v = x - x_0$. Pretpostavimo da je vektor v nulti vektor, tj. takav da vrijedi $Q(v) = Q(x - x_0) = 0$. Tada, s obzirom na ortonormalnu bazu, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, vrijedi da je

$$(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2 - (x_4 - x_{04})^2 = 0, \quad (10)$$

gdje su $x = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$ i $x_0 = \sum_{j=1}^4 x_{0j} e_j$. U fizici nam ova situacija opisuje dva događaja koja leže na zraci nekog fotona.

Definirajmo **svjetlosni** ili **nulti stožac** $C_N(x_0)$ u $x_0 \in M$ sa

$$C_N(x_0) = \{x \in M : Q(x - x_0) = 0\} \quad (11)$$

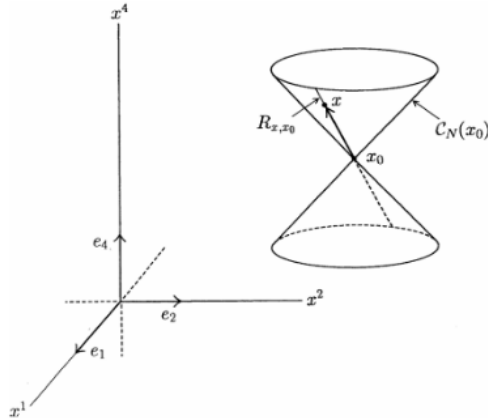
te nultu zraku sa

$$R_{x_0, x} = \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}, x \neq x_0\}. \quad (12)$$

Neka su $x_0 \neq x \in M$ takvi da je $Q(x - x_0) = 0$. Tada se može pokazati da vrijedi

$$R_{x_0, x} = C_N(x_0) \cap C_N(x), \quad (13)$$

tj. $C_N(x_0)$ je unija svih svjetlosnih zraka kroz x_0 .



Slika 1: Slika prikazuje svjetlosni stožac pridružen događaju $x_0 \in M$ u trodimenzionalnom prostor-vrijeme dijagramu.

Da bismo mogli razdvojiti svjetlosni stožac $C_N(x_0)$ na događaje iz prošlosti i budućnosti koji su povezani sa x_0 te analizirati njegov odnos sa vremenskim i prostornim vektorima koji povezuju događaje $x_0 \neq x \in M$ potrebno je proučiti sljedeći teorem i njegove posljedice.

Teorem 8. *Neka je $v \in M$ vremenski vektor i neka je $w \in M$ vremenski ili nulti vektor različit od 0. Neka su $v = \sum_{i=1}^4 v_i e_i$ i $w = \sum_{i=1}^4 w_i e_i$, gdje je $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormalna baza za M . Tada vrijedi*

1. $v_4 w_4 > 0$ i u tom slučaju je $g(v, w) < 0$ ili
2. $v_4 w_4 < 0$ i u tom slučaju je $g(v, w) > 0$.

Dokaz. Iz pretpostavke teorema imamo da je

$$\begin{aligned} g(v, v) &= (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2 - (v_4)^2 < 0 \quad \text{i} \\ (w_1)^2 + (w_2)^2 + (w_3)^2 - (w_4)^2 &\leq 0, \quad \text{iz čega slijedi da je} \\ (v_4 w_4)^2 &> ((v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2)((w_1)^2 + (w_2)^2 + (w_3)^2) \geq (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2, \end{aligned}$$

gdje smo kod druge nejednakosti koristili C-S-B nejednakost na \mathbb{R}^3 . Stoga imamo da je

$$|v_4 w_4| > |v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3|. \quad (14)$$

Posebno, iz prethodnog slijedi da je $v_4 w_4 \neq 0$ i $g(v, w) \neq 0$. Pretpostavimo prvo da je $v_4 w_4 > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} v_4 w_4 = |v_4 w_4| &> |v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3| \geq v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, \quad \text{iz čega imamo da je} \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 - v_4 w_4 &< 0, \end{aligned}$$

tj. $g(v, w) < 0$. S druge strane, ako je $v_4 w_4 < 0$ onda je $g(v, -w) < 0$ pa je $g(v, w) > 0$. \square

Posljedica prethodnog teorema je sljedeći rezultat.

Korolar 9. *Ako je vektor $v \neq 0 \in M$ ortogonalan na vremenski vektor, onda je v prostorni vektor.*

Označimo sada sa τ skup svih vremenskih vektora u M . Definirajmo relaciju \sim u τ na sljedeći način: Ako su $v, w \in M$, onda je $v \sim w$ ako i samo je $g(v, w) < 0$, tj. v_4 i w_4 imaju isti predznak u svakoj ortonormalnoj bazi. Možemo pokazati da je relacija \sim relacija ekvivalencije na τ , tj. da je relacija

refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Refleksivnost slijedi iz definicije jer je $g(v, v) < 0$ pa je $v \sim v$ za svaki $v \in \tau$. Neka je $v \sim w$. Tada je $g(v, w) < 0$, a zbog simetričnosti bilinearne forme slijedi $g(w, v) < 0$, tj. $w \sim v$. Neka su $v \sim w$ i $w \sim x$. Tada je $g(v, w) < 0$, odnosno v_4 i w_4 imaju isti predznak te $g(w, x) < 0$, odnosno w_4 i x_4 imaju isti predznak. Iz prethodnog slijedi da v_4 i x_4 imaju isti predznak, tj. $g(v, x) < 0$ pa je $v \sim x$, čime je dokazana tranzitivnost. Primijetimo da je τ unija dvije disjunktne klase evivalencija τ^+ i τ^- gdje je klasifikacija dana s obzirom na dvije mogućnosti izbora predznaka vremenske koordinate. Reći ćemo da elementi koji pripadaju klasi τ^+ (τ^-) imaju istu vremensku orijentaciju, tj. elementi koji pripadaju τ^+ su pozitivno, a elementi iz τ^- negativno orijentirani. Za svaki $x_0 \in M$ definiramo vremenske stošce $C\tau(x_0)$, $C\tau^+(x_0)$ i $C\tau^-(x_0)$ sa

$$C\tau(x_0) = \{x \in M : Q(x - x_0) < 0\}, \quad (15)$$

te $C\tau^+(x_0) = C\tau(x_0) \cap \tau^+$ i $C\tau^-(x_0) = C\tau(x_0) \cap \tau^-$.

Dakle, vremenski stožac $C\tau(x_0)$ predstavlja unutrašnjost svjetlosnog stošca $C_N(x_0)$. Pokazat ćemo da ima smisla proširiti pojam pozitivne i negativne orijentacije na nulte vektore. Ako je $n \neq 0 \in M$ nulti vektor, onda $g(n, v)$ ima isti predznak $\forall v \in \tau^+$. Da bi dokazali ovu tvrdnju pretpostavimo prvo suprotno, tj. neka su $v_1, v_2 \in \tau^+$ takvi da je $g(n, v_1) < 0$ i $g(n, v_2) > 0$. Možemo pretpostaviti da je $|g(n, v_1)| = g(n, v_2)$ jer uvijek možemo skalirati v_1 sa $g(n, v_2)/|(g(n, v_1))|v_1$ koji leži u τ^+ jer za $\forall v \in \tau^+$ vrijedi da je $v_4 > 0$ pa za αv , gdje je α pozitivan realni broj, vrijedi da je $\alpha v_4 > 0$, tj. $\alpha v \in \tau^+$. Sada imamo da je

$$g(n, g(n, v_2)/|g(n, v_1)|v_1) = g(n, v_2)/|g(n, v_1)|g(n, v_1) = -g(n, v_2). \quad (16)$$

Iz prethodnog slijedi da je $g(n, v_1) = -g(n, v_2)$, tj.

$$g(n, (v_1 + v_2)) = 0. \quad (17)$$

Pokažimo da je $v_1 + v_2 \in \tau^+$. S obzirom da su $v_1, v_2 \in \tau^+$ tj. $v_{14}, v_{24} > 0$ i $g(v_1, v_2) < 0$ slijedi da je i $v_{14} + v_{24} > 0$ te je $g(v_1 + v_2, v_1 + v_2) < 0$. Nadalje, $n \neq 0$ je nulti vektor pa smo dobili kontradikciju s Korolarom (9)

Definicija 10. Neka je $n \neq 0 \in M$ nulti vektor. Reći ćemo da n **pozitivno orijentiran** ako je $g(n, v) < 0, \forall v \in \tau^+$ te **negativno orijentiran** ako je $g(n, v) > 0, \forall v \in \tau^+$.

Sada za $x_0 \in M$ definiramo pozitivno orijentirani multi stožac u x_0 sa

$$C_N^+(x_0) = \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ je pozitivno orijentiran}\}. \quad (18)$$

i negativno orijentiran multi stožac sa

$$C_N^-(x_0) = \{x \in C_N(x_0) : x - x_0 \text{ je negativno orijentiran}\} \quad (19)$$

Dakle, svjetlosni stožac vizualiziramo kao dvostruki stožac čija gornja polovina (pozitivno orijentirana) u odnosu na x_0 predstavlja događaje koje svjetlost emitirana iz x_0 može dohvatiti, a donja polovina (negativno orijentirana) predstavlja događaje iz kojih emitirana svjetlost može dohvatiti x_0 . Nadalje, za svaki vremenski vektor $v \in M$ definiramo njegovo vremensko trajanje sa $\tau(v) = \sqrt{|Q(v)|}$, a posebno ako je $v = x - x_0$, tj. vektor pomaka između događaja x i x_0 onda $\tau(v)$ interpretiramo kao vremenski razmak između dva događaja u referentnom sustavu u kojem se događaji pojavljuju na istim prostornim koordinatama, ali u različitim vremenskim koordinatama. Pokažimo još i da za vremenske vektore vrijedi obrnuta C-S-B nejednakost.

Teorem 11. *Neka su $v, w \in M$ vremenski vektori. Tada vrijedi*

$$(v \cdot w)^2 \geq v^2 w^2, \quad (20)$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako su v i w linearno zavisni.

Dokaz. Neka je vektor u dan sa $u = av - bw$, gdje su $a = v \cdot w$ i $b = v \cdot v$. Primijetimo da je $u \cdot v = av^2 - bv \cdot w = v^2(v \cdot w) - v^2(v \cdot w) = 0$. S obzirom da je po pretpostavci teorema v vremenski vektor, iz Korolara (9) slijedi da je u jednak 0 ili je prostorni vektor. Stoga vrijedi da je

$$0 \leq u^2 = a^2 v^2 + b^2 w^2 - 2abv \cdot w, \quad (21)$$

gdje jednakost vrijedi samo ako je $u = 0$. Iz prethodnog sada slijedi da je

$$2v^2(v \cdot w)^2 \leq v^2(v \cdot w)^2 + (v^2)^2 w^2, \quad (22)$$

iz čega zbog $v^2 < 0$ slijedi da je $(v \cdot w)^2 \geq v^2 w^2$. Ako je $u = av - bw = 0$ onda zbog $a = v \cdot w \neq 0$ kao posljedice Teorema (8) slijedi da su v i w linearno zavisni. Obratno, ako su v i w linearno zavisni tj. $w = tv$, $t \in \mathbb{R}$, onda jednakost u (20) očito vrijedi. \square

Posljedica prethodnog teorema je da za svaka dva vremenska vektora $v, w \in M$ koji su iste vremenske orijentacije ($v \cdot w < 0$) vrijedi obrnuta nejednakost trokuta tj.

$$\tau(v + w) \geq \tau(v) + \tau(w), \quad (23)$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo su v i w linearno zavisni. Time smo pokazali da u pseudo-euklidskim prostorima za pseudo-normu općenito ne vrijedi svojstvo nejednakosti trokuta.

Nadalje, podskup $\{x_0 + t(x - x_0) \mid t \in \mathbb{R}, Q(x - x_0) < 0\}$ nazivamo vremenskim pravcem u M . Vremenski pravac predstavlja putanju materijalne čestice koja se giba konstantnom brzinom. Općenito se ne gibaju sve materijalne čestice konstantnom brzinom, a da mi mogli modelirati takve slučajeve u prostor-vremenu navodimo sljedeće definicije.

Definicija 12. *Krivulja u \mathbb{R}_1^4 je glatko preslikavanje $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^4$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval.*

S obzirom na odabranu ortonormalnu bazu $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ u M krivulja je parametrizirana sa $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$, $\forall t \in I$.

Definicija 13. *Za krivulju $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ kažemo da je regularna ako vrijedi $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Regularna krivulja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ naziva se*

1. *prostorna krivulja ako vrijedi $Q(\alpha'(t)) > 0$, $\forall t \in I$,*
2. *nulta ili svjetlosna krivulja ako vrijedi $Q(\alpha'(t)) = 0$, $\forall t \in I$,*
3. *vremenska krivulja ako vrijedi $Q(\alpha'(t)) = 0$, $\forall t \in I$.*

Tangencijalni vektor $v(t) = \alpha'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t), x'_4(t))$, predstavlja brzinu materijalne čestice u $t \in I$. Promotrimo sada putanju materijalne čestice dane sa $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), ct)$, $\forall t \in I$ te njen vektor brzine $v(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t), c)$. Postulat specijalne teorije relativnosti zahtjeva da vrijedi $\sum_{i=1}^3 (x'_i)^2(t) \leq c^2$, stoga za vektor brzine materijalne čestice za koje je masa $m > 0$ mora vrijediti $Q(v(t)) < 0$. Zaključujemo da je putanja materijalne čestice u prostor-vremenu opisana vremenskom krivuljom, a vektor brzine u svakoj točki krivulje leži unutar svjetlosnog stošca pridruženog toj točki. Neka je $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ vremenska krivulja koja predstavlja putanju nekog objekta, definiramo vlastitu vremensku duljinu od α u M sa

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)|^{\frac{1}{2}} dt, \quad (24)$$

gdje duljinu $L(\alpha)$ interpretiramo kao vremenski razmak između događaja $\alpha(a)$ i $\alpha(b)$ mjenenog satom pričvršćenim za objekt koji se giba duž putanje $\alpha(t)$. Lako se provjeri da u slučaju konstantnog gibanja vlastito vrijeme $L(\alpha)$ odgovara koordinatnom vremenskom razmaku $\tau(v)$ za $v = \alpha(b) - \alpha(a)$. Neka su $x_0 \neq x \in M$ dva različita događaja i neka za $v = x - x_0$ vrijedi da je $Q(v) > 0$, tj. v je prostorni vektor. Tada slijedi da je v izvan svjetlosnog stošca od x_0 . Drugim riječima, ne postoji referentni sustav u kojem promatrač može imati iskustvo oba događaja, ali postoji referentni sustav u kojem se ti događaji odvijaju simultano te u tom slučaju $S(v) = \sqrt{|Q(v)|}$ predstavlja prostornu udaljenost između tih događaja.

Završit ćemo ovo poglavlje sumirajući prethodna razmatranja. Svakom događaju u prostoru M možemo pridružiti dvostruki svjetlosni stožac koji ima važnu fizikalnu interpretaciju jer pomoću njega vizualiziramo uzročno-posljedičnu vezu događaja u M . Događaji na svjetlosnom stošcu su sa početnim događajem povezani svjetlosnim zrakama dok događaji unutar gornje (donje) polovine dvostrukog svjetlosnog stošca predstavljaju događaje koje početni događaj može uzrokovati (predstavljaju događaje koji su mogli utjecati na početni događaj), a povezani su vremenskim zrakama ili krivuljama koje možemo interpretirati kao putanje materijalnih čestica. Događaji izvan svjetlosnog stošca nekog događaja su prostorno separirani od početnog događaja na način da ne mogu utjecati na početni događaj niti početni događaj može utjecati na njih te ne mogu biti povezani ni svjetlosnim zrakama.

4 Lorentzove transformacije

Vrlo važan alat pri matematičkoj formulaciji specijalne teorije relativnosti su Lorentzove transformacije pomoću kojih opisujemo vezu između prostorno-vremenskih koordinata nekog događaja mjenenih u različitim inercijskim referentnim sustavima koji su u međusobnom relativnom gibanju. Konstrukcija Lorentzovih transformacija temelji se na postulatima specijalne teorije relativnosti, tj. na zahtjevu da kvadratna norma vektora iz M ostane očuvana. U ovom poglavlju ćemo opisati kako izgledaju takve transformacije te pokazati da tvore grupu koju nazivamo Lorentzova grupa.

Neka su $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ i $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ dvije ortonormalne baze za M . Tada postoji jedinstveni linearni operator $L : M \rightarrow M$ takav da je $L(e_a) = e'_a$

za svaki $a = 1, 2, 3, 4$. Takvo preslikavanje “čuva skalarni produkt od M ”.

Definicija 14. Za linearni operator $L : M \rightarrow M$ kažemo da je ortogonalan ako vrijedi da je $g(L(x), L(y)) = g(x, y)$, $\forall x, y \in M$.

Može se pokazati da je ortogonalna transformacija L izomorfizam prostora M što je posljedica nedegeneriranosti skalarnog produkta na M . Neka je $L(x) = L(y)$, $x, y \in M$. Imamo da vrijedi $g(v, x - y) = g(L(v), L(x - y)) = 0, \forall v \in M$ pa zbog nedegeneriranosti forme slijedi da je $x = y$, tj. L je injektivan. Iz teorema o rangu i defektu slijedi da je L izomorfizam.

Lema 15. Neka je $L : M \rightarrow M$ linearni operator. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. L je ortogonalni operator.
2. L čuva kvadratnu formu tj. $Q(L(x)) = Q(x)$, $\forall x \in M$.
3. L preslikava ortonormalnu bazu u ortonormalnu bazu u M .

Dokaz. Implikacija $1 \rightarrow 2$ slijedi iz definicije ortogonalnog operatora. Za implikaciju $2 \rightarrow 1$ imamo da je

$$g(x + y, x + y) - g(x - y, x - y) = 2g(x, y), \quad (25)$$

a druge strane koristeći činjenicu da je L linearni operator i linearnost bilinearne forme imamo da je

$$g(L(x + y), L(x + y)) - g(L(x - y), L(x - y)) = 2g(L(x), L(y)). \quad (26)$$

Po pretpostavci vrijedi jednakost lijevih strana izraza (25) i (26) iz čega slijedi $g(x, y) = g(L(x), L(y))$, $\forall x, y \in M$. Neka je sada $\{e_i\}$ ortonormalna baza u M . Ortogonalni operator L je izomorfizam, a po definiciji čuva skalarni produkt stoga vrijedi $g(e_i, e_j) = g(L(e_i), L(e_j)) = \eta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, 4$ iz čega slijedi da je $\{L(e_i)\}$ ortonormalna baza čime smo pokazali da vrijedi $1 \rightarrow 3$. Konačno, pretpostavimo da vrijedi tvrdnja 3. Neka su $x = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^4 y_i e_i$, gdje je $\{e_i\}$ ortonormalna baza. Imamo da je

$$g(L(x), L(y)) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \eta_{ij} x_i y_j = g(x, y), \forall x, y \in M, \quad (27)$$

čime smo pokazali da vrijedi $3 \rightarrow 1$. □

Neka je $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormalna baza u M . Tada iz prethodne leme slijedi da je i $e'_1 = L(e_1)$, $e'_2 = L(e_2)$, $e'_3 = L(e_3)$ i $e'_4 = L(e_4)$ ortonormalna baza za M . Posebno, svaki e_i , $i = 1, 2, 3, 4$, možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora e'_j , tj. $e_i = \sum_{j=1}^4 a_{ji}e'_j$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$, gdje su $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Uvjete ortogonalnosti $g(e_k, e_l) = \eta_{kl}$, $k, l = 1, 2, 3, 4$ sada možemo zapisati kao

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ik}a_{jl}\eta_{ij} = \eta_{kl}, \quad \forall k, l = 1, 2, 3, 4. \quad (28)$$

Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica prijelaza iz baze $\{e_i\}$ u bazu $\{e'_i\}$ tj. matrica pridružena operatoru L^{-1} u bazi e'_i i neka je $x \in M$ element koji u bazama $\{e_i\}$ i $\{e'_i\}$ ima zapise $x = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$ i $x = \sum_{i=1}^4 x'_i e'_i$. Tada vrijedi da je

$$x'_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}x_j, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4. \quad (29)$$

Uvjet (28) sada možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$A^T \eta A = \eta. \quad (30)$$

Svaku matricu A reda 4×4 koja zadovoljava relaciju (30) nazvat ćemo općom (homogenom) Lorentzovom transformacijom. Iz relacije (30), budući da su ortogonalne transformacije u M izomorfizmi i stoga invertibilne te vrijedi $\eta = \eta^{-1}$, slijedi da je

$$A^{-1} = \eta A^T \eta. \quad (31)$$

iz čega slijedi da je $(A^{-1})^T \eta A^{-1} = \eta$. Nadalje, neka su A_1 i A_2 dvije Lorentzove transformacije. Imamo da je

$$(A_1 A_2)^T \eta (A_1 A_2) = A_2^T (A_1^T \eta A_1) A_2 = A_2^T \eta A_2 = \eta, \quad (32)$$

čime smo pokazali da je skup svih Lorentzovih transformacija zatvoren na matrično množenje i invertiranje tj. tvori ortogonalnu grupu

$$O(1, 3) = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid A^T \eta A = \eta\} \quad (33)$$

koju nazivamo Lorentzova grupa. Iz (31) za elemente matrice A^{-1} , koje ćemo označiti s a'_{ij} , slijedi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & -a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & -a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -a_{43} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (34)$$

te vrijedi da je

$$e'_i = \sum_{j=1}^4 a'_{ji} e_j \quad \text{i} \quad x_i = \sum_{j=1}^4 a'_{ji} x'_j, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4. \quad (35)$$

Ako u relaciji (28) stavimo $k = l = 4$ onda dobijemo da je

$$(a_{44})^2 = 1 + (a_{14})^2 + (a_{24})^2 + (a_{34})^2 \quad (36)$$

iz čega slijedi da je $(a_{44})^2 \geq 1$ tj. $a_{44} \geq 1$ ili $a_{44} \leq -1$.

Definicija 16. Za Lorentzovu transformaciju ćemo reći da je ortokronska ako vrijedi da je $a_{44} \geq 1$ i neortokronska ako je $a_{44} \leq -1$.

Teorem 17. Neka je $A \in O(1, 3)$ Lorentzova transformacija i neka je $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormalna baza u M . Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. A je ortokronska transformacija.
2. A čuva orijentaciju svi nultih vektora različitih od 0, odnosno ako je $v = \sum_{i=1}^4 v_i e_i \neq 0 \in M$ nulti vektor, onda v_4 i $v'_4 = \sum_{i=1}^4 a_{4i} v_i$ imaju isti predznak.
3. A čuva orijentaciju svih vremenskih vektora iz M .

Dokaz. Neka je $v = \sum_{i=1}^4 v_i e_i$ vektor iz M koji je vremenski ili nulti različit od

0. Iz C-S-B nejednakosti na \mathbb{R}^3 slijedi da je

$$(a_{41}v_1 + a_{42}v_2 + a_{43}v_3)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^3 (a_{4i})^2\right) \left(\sum_{i=1}^3 (v_i)^2\right). \quad (37)$$

Relacija ortogonalnosti (28) je ekvivalentna s relacijom $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ki} a_{lj} \eta_{ij} = \eta_{kl}$, $\forall k, l = 1, 2, 3, 4$, gdje za $k = l = 4$ dobijemo da je

$$(a_{41})^2 + (a_{42})^2 + (a_{43})^2 - (a_{44})^2 = -1 \quad (38)$$

iz čega slijedi da je $(a_{44})^2 > (a_{41})^2 + (a_{42})^2 + (a_{43})^2$. Nadalje, v je vremenski ili nulti vektor pa vrijedi $v_4^2 \geq v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, a s obzirom da je $v \neq 0$ iz prethodnog i iz (37) slijedi da je

$$(a_{41}v_1 + a_{42}v_2 + a_{43}v_3)^2 < (a_{44}v_4)^2 \quad (39)$$

što možemo zapisati u obliku

$$(a_{41}v_1 + a_{42}v_2 + a_{44}v_3 - a_{44}v_4)(a_{41}v_1 + a_{42}v_2 + a_{43}v_3 + a_{44}v_4) < 0. \quad (40)$$

Definirajmo vektor $u = a_{41}e_1 + a_{42}e_2 + a_{43}e_3 + a_{44}e_4$. Iz (38) slijedi da je u vremenski vektor i (40) možemo zapisati u obliku

$$(v \cdot u)v'_4 < 0, \quad (41)$$

iz čega slijedi da $v \cdot u$ i v'_4 imaju suprotne predznake.

Sada ćemo pokazati da je $a_{44} \geq 1$ ako i samo ako v_4 i v'_4 imaju iste predznake. Neka je $a_{44} \geq 1$. Ako je $v_4 > 0$, onda iz Teorema (8) slijedi da je $v \cdot u < 0$, a iz (41) slijedi da je $v'_4 > 0$. Ako je $v_4 < 0$, onda je $v \cdot u > 0$ iz čega slijedi da je $v'_4 < 0$, čime smo dokazali tvrdnju. Slično se pokaže da $a_{44} \leq 1$ implicira da v_4 i v'_4 imaju suprotne predznake. \square

Iz prethodnog teorema slijedi da ukoliko je $A \in O(1, 3)$ neortokronska transformacija da će onda zamijeniti orijentaciju svim vremenskim i nultim vektorima različitim od 0. Stoga ćemo proučavati samo ortokronske transformacije. Nadalje, osim vremenske orijentacije želimo da transformacije čuvaju i prostornu orijentaciju. Posebno, izbor inercijskih referentnih sustava ćemo ograničiti na ortonormalne baze $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ gdje skup prostornih vektora $\{e_1, e_2, e_3\}$ tvori desnu bazu, tj. vrijedi $e_1 \times e_2 \cdot e_3 = 1$, a e_4 je pozitivno orijentiran vremenski vektor te želimo da Lorentzove transformacije povezuju različite inercijske referentne sustave. Iz relacije (30) slijedi da je $\det(A) = \det(A^T) \det(\eta) \det(A) = (\det(A))^2 = 1$ stoga je $\det(A) = 1$ ili $\det(A) = -1$. Prethodno razmatranje nam sugerira izbor Lorentzovih transformacija čija je $\det(A) = 1$.

Definicija 18. Reći ćemo da je Lorentzova transformacija prava transformacija ako je $\det(A) = 1$.

Pokazat ćemo da skup \mathcal{L} svih ortokronskih i pravih transformacija

$$\mathcal{L} = \{A \in O(1, 3) \mid a_{44} > 0 \wedge \det(A) = 1\} \quad (42)$$

tvori podgrupu u $O(1, 3)$. Neka je $A \in \mathcal{L}$, tada je $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$, a iz (34) slijedi da je $a'_{44} = a_{44} \geq 1$, čime smo pokazali zatvorenost na invertiranje. Neka su $A, B \in \mathcal{L}$. Imamo da je $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$. Nadalje, imamo da je

$$(AB)_{44} = A_{44}B_{44} + A_{41}B_{14} + A_{42}B_{24} + A_{43}B_{34}. \quad (43)$$

Iz C-S-B nejednakosti na \mathbb{R}^3 slijedi da je

$$\left| \sum_{i=1}^3 A_{4i}B_{i4} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 A_{4i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 B_{i4}^2}, \quad (44)$$

a iz (31) slijedi da je

$$A_{44}^2 = 1 + A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2. \quad (45)$$

Sada iz (36) i (45) slijedi da je

$$\sqrt{\sum_{i=1}^3 A_{4i}^2} = \sqrt{A_{44}^2 - 1}, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^3 B_{i4}^2} = \sqrt{B_{44}^2 - 1}. \quad (46)$$

Uvrštavajući prethodno u (44) imamo da je

$$-\sqrt{A_{44}^2 - 1}\sqrt{B_{44}^2 - 1} \leq \sum_{i=1}^3 A_{4i}B_{i4} \leq \sqrt{A_{44}^2 - 1}\sqrt{B_{44}^2 - 1}. \quad (47)$$

Sada iz prethodnog i jednadžbe (43) slijedi da je

$$A_{44}B_{44} - \sqrt{A_{44}^2 - 1}\sqrt{B_{44}^2 - 1} \leq (AB)_{44} \leq A_{44}B_{44} + \sqrt{A_{44}^2 - 1}\sqrt{B_{44}^2 - 1}. \quad (48)$$

Analizirajući prethodni izraz u slučaju $A_{44} \geq 1$ i $B_{44} \geq 1$ dolazimo do izraza

$$0 < A_{44}B_{44} - \sqrt{(A_{44}^2 - 1)\sqrt{B_{44}^2 - 1}} \leq (AB)_{44} \quad (49)$$

iz čega slijedi da je $(AB)_{44} \geq 1$. Mi ćemo proučavanje ograničiti na grupu \mathcal{L} koju ćemo odsada zvati Lorentzovom grupom, a njene elemente Lorentzovim transformacijama. Promatrajući samo restrikciju \mathcal{L} Lorentzove grupe osigurali smo da Lorentzove transformacije uz prostorno-vremenski interval čuvaju i prostornu i vremensku orijentaciju vektora iz M . U ostatku rada ćemo proučiti dvije važne podgrupe transformacija od \mathcal{L} za koje se može pokazati da generiraju cijelu grupu \mathcal{L} , tj. pomoću njih se mogu opisati sve transformacije iz \mathcal{L} .

4.1 Rotacije

Lorentzova grupa \mathcal{L} ima važnu podgrupu \mathcal{R} koja sadrži sve elemente R oblika:

$$R = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & [R_{ij}] & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

gdje je $[R_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3$ ortogonalna matrica za koju vrijedi $\det [R_{ij}] = 1$. Iz prethodnog slijedi da je onda i $\det R = 1$, a $R_{44} = 1 \geq 1$, s čime smo pokazali da je $R \in \mathcal{L}$. Iz činjenice da je umnožak dviju ortogonalnih matrica opet ortogonalna matrica te je inverz ortogonalne matrice također ortogonalna matrica slijedi zatvorenost od \mathcal{R} na množenje i invertiranje. S obzirom da transformacije koordinata inducirane transformacijom R odgovaraju rotaciji prostornih koordinata u danom referentnom sustavu, podgrupu \mathcal{R} nazivamo rotacijskom podgrupom od \mathcal{L} , a njene elemente rotacijama u \mathcal{L} .

Lema 19. *Neka je $A \in \mathcal{L}$, tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. A je rotacija,
2. $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$,
3. $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$,
4. $a_{44} = 1$.

Dokaz. Međusobne ekvivalencije od (2) i (3) i (4) slijede direktno iz (36) i (45) i pretpostavke da je A ortokronska transformacija. Rotacija po definiciji zadovoljava svojstva (2), (3) i (4). Pretpostavimo sada da vrijedi (4) slijedi da je $[a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3$ ortogonalna matrica čija je determinanta jednaka 1 jer mora vrijediti da je $\det(A) = 1$, a iz (31) slijedi da mora vrijediti da je $[a_{ij}]^{-1} = [a_{ij}]^T$, $i, j = 1, 2, 3$ čime smo pokazali ekvivalenciju od (4) i (1). \square

4.2 Specijalna Lorentzova transformacija

Da bismo motivirali proučavanje specijalnih Lorentzovih transformacija te pojasnili fizikalnu interpretaciju parametra o kojem ovise proučit ćemo sljedeći primjer.

Primjer 20. *Neka su $S = \{e_i\}$ i $S' = \{e'_i\}$ dva inercijska referentna sustava. Neka su $x, x_0 \in M$ dva događaja i neka za vektor $x - x_0$ vrijedi $x - x_0 = \sum_{i=1}^4 \Delta x_i e_i$ i $x - x_0 = \sum_{i=1}^4 \Delta x'_i e'_i$. Promatramo slučaj kada se događaji nalaze na putanji čestice koja miruje s obzirom na S' , tj. vrijedi $\Delta x'_1 = \Delta x'_2 = \Delta x'_3 = 0$, a $\Delta x'_4$ je vremenski razmak između događaja u S' . Koristeći matricu prijelaza $A^{-1} = [a'_{ij}]$ iz baze $\{e_i\}$ u bazu $\{e'_i\}$ imamo da je*

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^4 a'_{ji} \Delta x'_j = a'_{4i} \Delta x'_4, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (51)$$

Iz prethodnog i činjenice da su a'_{44} i a_{44} različiti od 0 slijedi da su

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta x_4} = \frac{a'_{4i}}{a'_{44}} = -\frac{a_{4i}}{a_{44}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (52)$$

konstante i ne ovise o izabranoj čestici koja miruje u S' . Omjere (52) u fizici interpretiramo kao komponente vektora brzine v inercijskog referentnog sustava S' s obzirom na S , tj.

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, \quad v_i = \frac{a'_{4i}}{a'_{44}} = -\frac{a_{4i}}{a_{44}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (53)$$

Nadalje, vrijedi da je

$$\sum_{i=1}^3 (\Delta x_i / \Delta x_4)^2 = 1 - a_{44}^{-2}. \quad (54)$$

Iznos brzine inercijskog referentnog sustava S' s obzirom na S ćemo označiti sa β , tj.

$$\beta^2 = 1 - (a_{44})^{-2} \quad (55)$$

te ćemo uvesti oznaku za matični element a_{44} kojeg ćemo izraziti koristeći (55) sa

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (56)$$

Primjetimo da je $0 \leq \beta^2 < 1$ te vrijedi da je $\beta = 0$ ako i samo ako je A rotacija. Lako se provjeri da vektor brzine inercijskog referentnog sustava S u odnosu na S' ima isti konstantni iznos β . Također, iz (51) slijedi da je $\Delta x_4 = \gamma \Delta x'_4$ čime je iskazan efekt dilatacije vremena pri relativnom gibanju od S i S' .

Iz uvjeta ortogonalnosti (28) i iz (56) dobijemo da je da je svaka $A \in \mathcal{L}$ oblika

$$A(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (57)$$

gdje je $[a_{ij}]$, $i, j = 2, 3$ ortogonalna matrica za koju vrijedi $\det [a_{ij}] = 1$, tj. predstavlja rotaciju u ravnini \mathbb{R}^2 . Uzimajući najjednostavniji oblik ortogonalne matrice $[a_{ij}]$, $i, j = 2, 3$, tj. izborom jedinične matrice dobijamo klasu matrica oblika

$$\Lambda(\beta) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$\forall \beta \in -1 < \beta < 1$ i $\gamma = \gamma(\beta) = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, koju nazivamo **specijalnim Lorentzovim transformacijama**. Pridružena transformacija koordinata je dana sa

$$x'_1 = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x_1 - \beta(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x_4, \quad (59)$$

$$x'_2 = x_2, \quad (60)$$

$$x'_3 = x_3, \quad (61)$$

$$x'_4 = -\beta(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x_1 + (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}x_4 \quad (62)$$

te je često nazivamo pojačanjem u smjeru osi x . Označimo sa

$$L_x = \{A \in \mathcal{L} \mid A \text{ je specijalna Lorentzova transformacija}\}. \quad (63)$$

Možemo pokazati da je L_x grupa u odnosu na množenje matrica. Neka je $A \in L_x$, tada je inverz matrice A dan sa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (64)$$

tj. $A(\beta)^{-1} = A(-\beta)$, čime smo pokazali zatvorenost na invertiranje. Neka su sada $A_1 = A(\beta_1)$, $A_2 = A(\beta_2) \in L_x$. Tada imamo da je

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) & 0 & 0 & -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & 0 & 0 & \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \end{bmatrix}, \quad (65)$$

tj.

$$A(\beta_1) A(\beta_2) = A\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}\right), \quad (66)$$

čime smo pokazali zatvorenost na množenje matrica. Ako sada β_1 interpretiramo kao iznos relativne brzine referentnog inercijskog sustava $S' = \{e'_i\}$ u odnosu na $S = \{e_i\}$, β_2 kao iznos relativne brzine od $S'' = \{e''_i\}$ u odnosu na $S' = \{e'_i\}$, onda nam izraz $\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$ predstavlja iznos relativne brzine od $S'' = \{e''_i\}$ u odnosu na $S = \{e_i\}$. Primjetimo da γ i β zadovoljavaju relaciju $\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$, stoga možemo uvesti parametrizaciju $\gamma = \cosh(\theta)$ i $\beta\gamma = \sinh(\theta)$, tj. $\theta = \tanh^{-1}(\beta)$ jer je \tanh^{-1} bijektivno diferencijabilno preslikavanje sa $0 \leq \beta < 1$ u \mathbb{R} . Specijalne Lorentzove transformacije sada možemo zapisati u obliku

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & 0 & 0 & -\sinh(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\theta) & 0 & 0 & \cosh(\theta) \end{bmatrix} \quad (67)$$

iz kojeg vidimo da nam parametrizacija preko hiperboličkog kuta θ omogućuje da uspostavimo analogiju specijalnih Lorentzovih transformacija sa rotacijama u euklidskom prostoru. Dakle, specijalne Lorentzove transformacije geometrijski interpretiramo kao hiperboličke rotacije za kut θ u prostor-vremenu. Također, ako θ_1 interpretiramo kao relativnu brzinu referentnog

inercijskog sustava S' u odnosu na S , sa θ_2 relativnu brzinu od S'' u odnosu na S , onda nam izraz $\theta_1 + \theta_2$ predstavlja relativnu brzinu od S'' u odnosu na S , tj. $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$. Iz prethodnog i činjenice da je $A(\theta)$ neprekidno preslikavanje i da je $A(0) = I$ vidimo da je L_x jednoparametarska podgrupa u $O(1, 3)$. Važnost specijalnih Lorentzovih transformacija leži u činjenici da zajedno s rotacijama generiraju grupu Lorentzovih transformacija \mathcal{L} o čemu nam govori sljedeći rezultat čiji se dokaz nalazi u [4].

Teorem 21. *Neka je $A \in \mathcal{L}$ prava ortokronska transformacija. Tada postoji $\theta \in \mathbb{R}$ i dvije rotacije $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ tako da vrijedi $A = R_1 A(\theta) R_2$.*

Kao posljedicu prethodnog teorema zaključujemo da specijalne Lorentzove transformacije sadrže sve fizikalno bitne informacije o Lorentzovim transformacijama. Za kraj, napravimo još usporedbu Lorentzovih transformacija sa Galileovim transformacijama koje su se koristile prije otkrića specijalne teorije relativnosti u klasičnoj mehanici da bi opisale vezu između koordinata događaja mjerenih u različitim inercijskim referentnim sustavima. Glavna razlika između Galileovih i Lorentzovih transformacija leži u činjenici da Galileove transformacije pretpostavljaju apsolutno vrijeme i prostor (nema kontrakcije duljine i dilatacije vremena u sustavima u gibanju) te brzina svjetlosti nije konstantna za promatrače u gibanju. Veza između koordinata mjerenih u inercijskim referentnim sustavima $S(x, y, z, t)$ i $S'(x', y', z', t')$ je dana sa

$$x' = x - vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t', \quad (68)$$

gdje v predstavlja konstantnu brzinu gibanja od S' u odnosu na S u smjeru osi x . Uspoređujući (68) sa (59)-(62) vidimo da Lorentzove transformacije (59)-(62) prelaze u Galileove transformacije (68) u limesu kada $\beta \rightarrow 0$, odnosno kada je brzina sustava S' u odnosu na sustav S zanemariva u odnosu na brzinu svjetlosti.

Literatura

- [1] D.N. Burić, *Uvod u prostor Minkowskog i Lorentzove transformacije*, <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:413631> (2025).
- [2] Hermann Minkowski *Space and Time, Minkowski's Papers on Relativity*, Translated by Fritz Lewertoff and Vesselin Petkov, Edited by Vesselin Petkov, Minkowski Institute Press, Montreal, Quebec, Canada, 2012.

- [3] Albert Einstein, *Relativity, The Special and the General Theory*, Translated by Robert W. Lawson, University of Sheffield, Introduced by Nigel Calder.
- [4] Gregory L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime (Second edition)*, Applied Mathematical Sciences, Springer **92**.
- [5] Catherine Meusburger, *Concepts and Methods of Mathematical Physics*, Department Mathematik FAU Erlangen-Nurnberg Bismarckstr. 1 1/2 D- 91054 Erlangen Germany August 12, 2011.

Tea Martinić Bilać
University of Split, Faculty of Science,
Ruđera Boškovića 33, HR-21 000 Split, Croatia

E-mail address: teamar@pmfst.hr

Dominik Neno Burić
University of Split, Faculty of Science,
Ruđera Boškovića 33, HR-21 000 Split, Croatia

E-mail address: dburic@pmfst.hr