ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA AMAS logo

Skup postignuća reda i Erdősovi problemi o jediničnim razlomcima

Vjekoslav Kovač

Abstract

Obradit ćemo jednostavni, a ne previše poznati koncept vezan uz redove. On će nam potom pomoći (djelomično ili potpuno) riješiti nekoliko problema o jediničnim razlomcima koje je bio postavio poznati matematičar Paul Erdős.

Keywords: red brojeva, konvergencija, nutrina, iracionalni broj.
Math. Subj. Class.: 40A05

1 Skup postignuća reda

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ red s članovima $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ iz $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. *Skup postignuća* (eng. *achievement set*) reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je

$$A(x) := \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \,:\, \varepsilon_n \in \{0,1\} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},\ \sum_{n} \varepsilon_n x_n \text{ konvergira} \Big\}.$$

To je podskup od $\mathbb{R}^d$ koji sadrži ishodište 0. Tako je naprimjer:

- skup postignuća reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jednak $[0, \infty\rangle$,
- skup postignuća reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ jednak $\mathbb{R}$,
- skup postignuća reda $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jednak $\mathbb{N}_0$.

Ako $\sum_n x_n$ apsolutno konvergira ili ako su $x_n \in [0, \infty\rangle^d$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada alternativno možemo pisati

$$A(x) = \Big\{ \sum_{n \in S} x_n \, : \, S \subseteq \mathbb{N} \Big\} \cap \mathbb{R}^d,$$

jer poredak zbrajanja prestaje biti važan. Pritom sumiranje po $S = \emptyset$ interpretiramo kao $0 \in \mathbb{R}^d$, a presjekom s $\mathbb{R}^d$ naglašavamo da uzimamo samo konačne sume.

Ovaj pojam je za realne redove proučavao japanski matematičar Sōichi Kakeya [8, 9] još pred više od stotinu godina.

Teorem 1 ([8, 9])**.** *Neka je $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ niz (strogo) pozitivnih brojeva takav da red $\sum_n x_n$ konvergira.*

(a) Ako za sve dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \geqslant x_n, \tag{1}$$

tada je $A(x)$ konačna unija nedegeneriranih segmenata. Ako je pak uvjet (1) ispunjen za baš svaki $n \in \mathbb{N}$, tada je $A(x)$ jednak segmentu $[0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n]$.

(b) Ako za sve dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k < x_n, \tag{2}$$

tada $A(x)$ ima praznu nutrinu, tj. ne sadrži nedegenerirani interval.

Dokaz. (a) Pretpostavimo najprije da (1) vrijedi za svaki indeks $n \in \mathbb{N}$. Označimo

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Uzimo proizvoljni $y \in [0, r_0]$. Induktivno konstruiramo koeficijente $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ iz $\{0, 1\}$ takve da za svaki $N \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$y - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \in [0, r_N]. \tag{3}$$

Tvrdnja je očigledna za $N = 0$ radi intervala iz kojega smo uzeli y. Pretpostavimo da su $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ već odabrani tako da vrijedi (3).

- Ako je
$$y-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n x_n\in[0,r_{N+1}],$$
tada stavimo $\varepsilon_{N+1}:=0$.

- Inače stavimo $\varepsilon_{N+1}:=1$ te primijetimo
$$y-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n x_n-x_{N+1}\in\langle\underbrace{r_{N+1}-x_{N+1}}_{\geqslant 0},\underbrace{r_N-x_{N+1}}_{=r_{N+1}}]\overset{(1)}{\subseteq}[0,r_{N+1}].$$

Na taj način uvijek imamo
$$y-\sum_{n=1}^{N+1}\varepsilon_n x_n\in[0,r_{N+1}]$$
pa je induktivni korak konstrukcije dovršen. Kako je $\sum_n x_n$ konvergentan, vrijedi $\lim_{N\to\infty}r_N=0$ pa iz (3) po teoremu o sendviču slijedi
$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x_n\in A(x).$$
Zaključujemo $A(x)=[0,r_0]$.

Sada pretpostavimo da postoji $m\in\mathbb{N}$ tako da je uvjet (1) ispunjen za svaki $n>m$. Primjenjujući dokazani slučaj na red $\sum_{n=m+1}^{\infty}x_n$ dobivamo $A((x_n)_{n=m+1}^{\infty})=[0,r_m]$ pa je
$$A(x)=\bigcup_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)\in\{0,1\}^m}\Big(\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n+A((x_n)_{n=m+1}^{\infty})\Big)\tag{4}$$
doista konačna unija segmenata pozitivne duljine.

(b) Opet najprije pretpostavimo da uvjet (2) vrijedi za svaki indeks $n\in\mathbb{N}$. Za svaki $N\in\mathbb{N}$ je $A(x)$ očigledno sadržan u uniji segmenata:
$$A(x)\subseteq\bigcup_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)\in\{0,1\}^N}\Big(\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n x_n+[0,r_N]\Big).$$

Svih gore navedenih 2^N segmenata je međusobno disjunktno. Naime, ako su $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ i $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_N)$ dvije N-torke iz $\{0,1\}^N$ koje se prvi put razlikuju na indeksu $1 \leqslant l \leqslant N$ te je $\varepsilon_l = 0 < 1 = \varepsilon'_l$, tada imamo

$$\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n + [0, r_N] \subseteq \sum_{n=1}^{l-1} \varepsilon_n x_n + [0, r_l]$$

i

$$\sum_{n=1}^{N} \varepsilon'_n x_n + [0, r_N] \subseteq \sum_{n=1}^{l-1} \varepsilon_n x_n + [x_l, \infty\rangle.$$

Ti su skupovi disjunktni, jer po pretpostavci (2) imamo $r_l < x_l$. Sada, dakle, znamo da je $A(x)$ sadržan u disjunktnoj uniji segmenata duljine r_N pa svaki interval u $A(x)$ može imati duljinu najviše r_N. Preostaje prisjetiti se da je $\lim_{N\to\infty} r_N = 0$.

Konačno ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da uvjet (2) vrijedi za sve $n > m$, tada po prethodnom znamo da je $A((x_n)_{n=m+1}^{\infty})$ zatvoren skup (vidjeti zadatak 1) s praznom nutrinom; takve skupove zovemo *nigdje gusti*. Skup postignuća polaznog reda je tada konačna unija (4) nigdje gustih skupova pa i sam ima praznu nutrinu po Baireovom teoremu o kategorijama. $\square$

Očigledno su dozvoljene varijante teorema kada indeks sumacije kreće od 0 ili od nekog prirodnog broja većeg od 1. Nadalje, prilično često se Kakeyin teorem 1 formulira uz dodatnu pretpostavku monotonosti niza,

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots,$$

no iz dokaza vidimo da ona nije potrebna. Ipak, često je prirodno padajuće sortirati niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prije primjene (a) dijela teorema 1, a ponekad to može biti i ključno, npr. u primjeru 5 ispod.

Navedimo još neke primjere skupova postignuća.

Primjer 1 (Segment)**.** Ako je $x_n = 1/2^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada je $A(x) = [0,1]$. Primijetimo da je uvjet (1) ispunjen za svaki $n \in \mathbb{N}$ i to čak s jednakosti.

Primjer 2 (Cantorov skup)**.** Ako je $x_n = 2/3^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada je $A(x)$ tzv. *Cantorov trijadski skup* prikazan na slici 1. Primijetimo da je (2) ispunjeno za sve $n \in \mathbb{N}$.

Slika 1: Cantorov skup

Slika 2: Cantorval

Primjer 3 (Cantorval)**.** Ako je $x_{2n-1} = 3/4^n$ i $x_{2n} = 2/4^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada je $A(x)$ tzv. (Guthrie–Nymannov) *Cantorval* prikazan na slici 2. Taj skup ima i "fraktalnu strukturu" i nepraznu nutrinu: on sadrži interval $[2/3, 1]$ duljine $1/3$, intervale $[1/6, 1/4]$ i $[17/12, 3/2]$ duljine $1/12$, itd. Primijetimo da su i (1) i (2) ispunjeni za beskonačno mnogo indeksa n.

Zanimljivo je da su okarakterizirane sve topološke mogućnosti za skupove postignuća jednodimenzionalnih redova. To su učinili Joe Guthrie i James Nymann [7], dok su Nymann i Ricardo Sáenz [13] popravili grešku iz prethodnog članka.

Teorem 2 ([7, 13])**.** *Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergentni red realnih brojeva. Tada je ispunjena točno jedna od sljedeće četiri mogućnosti:*

(A1) $A(x)$ je konačan skup;

(A2) $A(x)$ je konačna unija nedegeneriranih segmenata;

(A3) $A(x)$ je homeomorfan[1] Cantorovom skupu iz primjera 2;

(A4) $A(x)$ je homeomorfan Cantorvalu iz primjera 3.

Zainteresirani čitatelj može naći dokaz u [1]; vidjeti teorem 21.20. Kakeya je zapravo slutio da su (A1)–(A3) jedine mogućnosti i neuspješno to pokušavao dokazati. Na četvrtu mogućnost su prvi ukazali Alek Weinstein i Boris Shapiro [14]. Napomenimo da ipak nije jednostavno utvrditi u koju od četiri mogućnosti spada neki dani primjer. Preciznije, nije lako vidjeti je li riječ o Cantorovom skupu ili Cantorvalu.

[1]Skupovi X i Y su *homeomorfni* ako postoji bijekcija $f\colon X \to Y$ takva da su f i f^{-1} neprekidne. Možemo reći da su X i Y "isti u topološkom smislu".

2 Problemi o jediničnim razlomcima

Sada ćemo riješiti neke matematičke probleme motivirane pitanjima Paula Erdősa (1913.–1996.), u kojima se praktično može iskoristiti Kakeyin teorem 1. Svi ti problemi se tiču tzv. *jediničnih razlomaka*, što su razlomci oblika $1/m$ za $m \in \mathbb{N}$.

Primjer 4. Jedan zanimljivi otvoreni problem Erdősa i Ronalda Grahama [5] je pokazati ili opovrgnuti da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k} - 1}$$

iracionalni broj za svaki izbor prirodnih brojeva $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Komentirajmo slabiju tvrdnju, da kolekcija svih takvih suma ima praznu nutrinu.[2] Naime, ako označimo $x_n = 1/(2^n - 1)$, tada lako provjerimo uvjet (2):

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^k - 1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^n}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

odakle je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} < \frac{1}{2^n - 1}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz teorema 1 slijedi da čak čitav skup postignuća $A(x)$ reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ne sadrži interval. $\square$

Zapravo je Erdős još ranije [3] postavio općenitije pitanje: može li

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^{n_k} - 1}$$

biti racionalni broj za bilo koju prirodnu bazu $t \geqslant 2$ i bilo koji izbor prirodnih brojeva $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Pokazat ćemo slabiju tvrdnju koja kombinira redove tog oblika za nekoliko različitih brojeva t, a originalno su ju dokazali Terence Tao i autor ovog članka u [11].

[2] Kada bi svi brojevi tog oblika bili iracionalni, činili bi skup s praznom nutrinom, radi gustoće racionalnih brojeva u $\mathbb{R}$.

Primjer 5 ([11])**.** Neka su $2 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ prirodni brojevi takvi da je

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{t_j - 1} > 1.$$

Tada postoje skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \mathbb{N}$ među kojima je barem jedan beskonačan i takvi su da je

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{n \in S_j} \frac{1}{t_j^n - 1} \in \mathbb{Q}.$$

Za dokaz promotrimo red čiji članovi su elementi multiskupa

$$\left\{ \frac{1}{t_j^k - 1} \ : \ j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

sortirani u padajućem poretku u niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Jednom kada pokažemo da skup postignuća reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ima nepraznu nutrinu, uzet ćemo iz $A(x)$ bilo koji maksimalno skraćeni razlomak p/q s nazivnikom q koji je višekratnik od $(t_1 - 1) \cdots (t_m - 1) + 1$; takvi su i dalje gusti u $\mathbb{R}$. Po definiciji skupa postignuća postojat će $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \mathbb{N}$ takvi da je

$$\frac{p}{q} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in S_j} \frac{1}{t_j^k - 1},$$

ali suma na desnoj strani neće moći biti konačna, jer su svi nazivnici $t_j^k - 1$ relativno prosti s q.

Uzmimo

$$\varepsilon := 1 - \Big(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{t_j - 1} \Big)^{-1} \in \langle 0, 1 \rangle \tag{5}$$

i neka je N_0 najmanji prirodni broj takav da je

$$2^{N_0} > \frac{1}{\varepsilon} \tag{6}$$

Za svaki indeks $n \geqslant N_0$ dovoljno velik da vrijedi

$$x_n \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{1}{t_j^{N_0} - 1}$$

provjerit ćemo uvjet (1). Naime, za svaki $1 \leqslant j \leqslant m$ neka je $N_j \geqslant N_0$ prirodni broj takav da je

$$\frac{1}{t_j^{N_j} - 1} \geqslant x_n > \frac{1}{t_j^{N_j+1} - 1}. \tag{7}$$

Obzirom da niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ pada, svi razlomci $1/(t_j^k - 1)$ za $k \geqslant N_j + 1$ su svakako enumerirani njegovim članovima $(x_l)_{l=n+1}^{\infty}$. Dakle, možemo ocijeniti

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} x_l \geqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=N_j+1}^{\infty} \frac{1}{t_j^k - 1} > \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=N_j+1}^{\infty} \frac{1}{t_j^k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1/t_j^{N_j+1}}{1 - 1/t_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{t_j^{N_j}} \frac{1}{t_j - 1}.$$

Kako izbor od N_j garantira

$$t_j^{N_j} \geqslant 2^{N_j} \geqslant 2^{N_0} \overset{(6)}{>} \frac{1}{\varepsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{t_j^{N_j} - 1}{t_j^{N_j}} > 1 - \varepsilon,$$

dobivamo

$$\sum_{l=n+1}^{\infty} x_l > (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{t_j^{N_j} - 1} \frac{1}{t_j - 1} \overset{(7)}{\geqslant} (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{m} x_n \frac{1}{t_j - 1} \overset{(5)}{=} x_n.$$

To smo i trebali pokazati pa teorem 1 garantira da $A(x)$ ima nepraznu nutrinu. $\square$

Još jedno zanimljivo Erdősovo pitanje [5, 4] tiče se istovremene racionalnosti suma dvaju redova: koliko brzo može rasti niz prirodnih brojeva $2 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ takav da su obje sume

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1} \tag{8}$$

racionalne? Naprimjer, za $a_n = (n+1)(n+2)/2$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \Big) = 1$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+3)} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \Big) = \frac{11}{9}.$$

Slične primjere je moguće konstruirati i s polinomima većeg stupnja pa je Erdősa zanimalo već i može li niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kao gore rasti barem eksponencijalno brzo. Odgovor je povrdan.

Primjer 6. Postoje $\alpha > 1$ i rastući niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ koji zadovoljava

$$a_n \geqslant \alpha^n$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i takav je da su obje sume u (8) racionalni brojevi.

Slično kao u prethodnom primjeru dokaz nije eksplicitan. Izlistajmo svih 19 brojeva između 2^6 i 2^7 koji su relativno prosti s 2, 3 i 7:

$$\begin{array}{lllll}
b_0 = 65, & b_1 = 67, & b_2 = 71, & b_3 = 73, & b_4 = 79, \\
b_5 = 83, & b_6 = 85, & b_7 = 89, & b_8 = 95, & b_9 = 97, \\
b_{10} = 101, & b_{11} = 103, & b_{12} = 107, & b_{13} = 109, & b_{14} = 113, \\
b_{15} = 115, & b_{16} = 121, & b_{17} = 125, & b_{18} = 127. &
\end{array}$$

Za svaki niz $\epsilon = (\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ sastavljen od nula i jedinica promotrimo skup prirodnih brojeva

$$S_\epsilon := \Bigg(\bigcup_{\substack{i \geqslant 0,\ 0 \leqslant j \leqslant 18 \\ \varepsilon_{19i+j}=0}} \{9 \cdot 2^i b_j, 21 \cdot 2^i b_j\} \Bigg) \cup \Bigg(\bigcup_{\substack{i \geqslant 0,\ 0 \leqslant j \leqslant 18 \\ \varepsilon_{19i+j}=1}} \{7 \cdot 2^i b_j, 63 \cdot 2^i b_j\} \Bigg).$$

Upravo će S_ϵ biti skup vrijednosti traženog niza za pažljivo odabrani ϵ. Obzirom da je

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{63} = \frac{10}{63}, \tag{9}$$

suma

$$\sum_{m \in S_\epsilon} \frac{1}{m} = \frac{10}{63} \underbrace{\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \Big)}_{=2} \Big(\sum_{j=0}^{18} \frac{1}{b_j} \Big)$$

je uvijek jednaka istom racionalnom broju (neovisnom o ϵ). Nadalje, drugu promatranu sumu možemo zapisati

$$\sum_{m \in S_\epsilon} \frac{1}{m-1} = y + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x_n, \tag{10}$$

pri čemu je

$$y := \sum_{j=0}^{18} \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{9 \cdot 2^i b_j - 1} + \frac{1}{21 \cdot 2^i b_j - 1} \Big)$$

i $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ je dan s

$$x_{19i+j} := \frac{1}{7 \cdot 2^i b_j - 1} + \frac{1}{63 \cdot 2^i b_j - 1} - \frac{1}{9 \cdot 2^i b_j - 1} - \frac{1}{21 \cdot 2^i b_j - 1}.$$

Pokažimo da je skup postignuća reda $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jednak cijelom segmentu $[0, \sum_{n=0}^{\infty} x_n]$.

U provjeri uvjeta Kakeyinog teorema 1 trebat ćemo ocjenu

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \tag{11}$$

za $n \geqslant 2$, koja je neposredna posljedica od

$$n^3 \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \Big) = \frac{n}{n-1} \in [1, 2].$$

Označavajući

$$\Delta := \frac{1}{7^2} + \frac{1}{63^2} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{21^2} = \frac{8}{1323} > 0$$

i primijetivši

$$0 < \frac{2}{7^3} + \frac{2}{63^3} - \frac{1}{9^3} - \frac{1}{21^3} < \frac{1}{200}, \quad -\frac{1}{25000} < \frac{1}{7^3} + \frac{1}{63^3} - \frac{2}{9^3} - \frac{2}{21^3} < 0,$$

radi (11) i (9) možemo pisati

$$\frac{\Delta}{2^{2i} b_j^2} - \frac{1}{25000 \cdot 2^{3i} b_j^3} < x_{19i+j} < \frac{\Delta}{2^{2i} b_j^2} + \frac{1}{200 \cdot 2^{3i} b_j^3}.$$

Konačno, zbog $b_j > 2^6$ dobivamo

$$\Big(1 - \frac{3}{20000} \Big) \cdot \frac{\Delta}{2^{2i} b_j^2} < x_{19i+j} < \Big(1 + \frac{3}{200} \Big) \cdot \frac{\Delta}{2^{2i} b_j^2} \tag{12}$$

za $i \geqslant 0$ te $0 \leqslant j \leqslant 18$.

Iz (12) odmah slijedi da je $x_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ i da red $\sum_n x_n$ konvergira. Korisno je znati i da je niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ padajući, premda to nije nužno za primjenu teorema1. Naime, za $0 \leqslant j \leqslant 17$ imamo

$$\frac{x_{19i+j+1}}{x_{19i+j}} < \frac{1 + 3/200}{1 - 3/20000} \Big(\max_{0 \leqslant j \leqslant 17} \frac{b_j}{b_{j+1}} \Big)^2 < 1,$$

dok je

$$\frac{x_{19(i+1)}}{x_{19i+18}} < \frac{1+3/200}{1-3/20000}\Big(\frac{b_{18}}{2b_0}\Big)^2 < 1,$$

oboje opet zahvaljujući (12). Kako bismo pak provjerili uvjet (1) za $n \in \mathbb{N}_0$, zapišimo taj indeks kao $n = 19i + j$, $i \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant 18$, primijenimo (12) i prisjetimo se da je $2^6 < b_j < 2^7$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_{19i+j}} \sum_{l=19i+j+1}^{\infty} x_l &> \frac{1}{x_{19i+j}} \sum_{l=19(i+1)}^{19(i+1)+18} x_l \\ &> \frac{(1-3/20000)\cdot(1/2^{2i+2})\cdot 19\cdot 2^{-14}}{(1+3/200)\cdot(1/2^{2i})\cdot 2^{-12}} > 1.\end{aligned}$$

Po (a) dijelu teorema 1 sada doista znamo da je $A(x)$ segment pa je moguće odabrati koeficijente ϵ na način da je (10) također racionalni broj. Neka je $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ strogo rastući niz koji enumerira skup S_ϵ. Za svaki prirodni broj $m \geqslant 6$ samo elementi

$$9\cdot 2^i b_j,\ 21\cdot 2^i b_j \ \text{ ili } \ 7\cdot 2^i b_j,\ 63\cdot 2^i b_j$$

od S_ϵ koji odgovaraju indeksima $0 \leqslant i \leqslant m-7$, $0 \leqslant j \leqslant 18$ mogu biti manji od 2^m pa takvih članova ima najviše $38(m-6)$. Posljedično, ako za $k \in \mathbb{N}$ uzmemo prirodni broj $m \geqslant 6$ takav da je $38(m-6) < k \leqslant 38(m-5)$, tada imamo

$$a_k \geqslant 2^m > 2^{k/38} > 1.01^k,$$

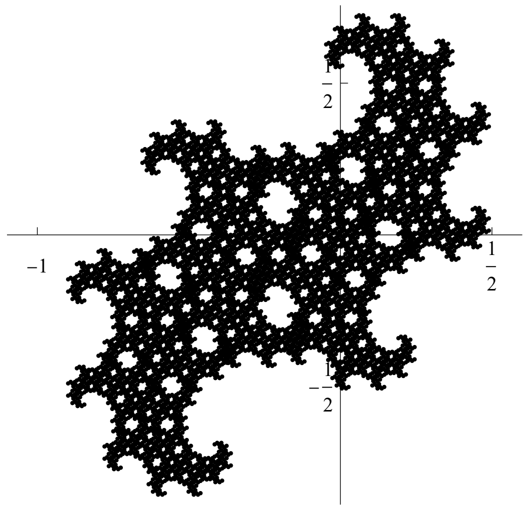
što potvrđuje željeni eksponencijalni rast. □

Zapravo su Tao i autor u radu [11] konstruirali niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s istim svojstvom koji raste čak dvostruko eksponencijalno, tj.

$$a_n \geqslant 2^{\beta^n}$$

za neki $\beta > 1$ i svaki $n \in \mathbb{N}$. S druge strane, opće je poznato da niz koji raste brže od $(2^{\beta^n})_{n=1}^{\infty}$ za svaki β nužno već samo sumu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ čini iracionalnom [6]. Na taj način je u [11] načelno odgovoreno na Erdősovo pitanje.

Problemi poput prethodnog se prirodnije mogu promatrati u kontekstu proučavanja skupova postignuća redova $\sum_n x_n$ s članovima x_n u višedimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^d$. Ipak, oni mogu imati vrlo složenu strukturu i do danas nije poznata njihova karakterizacija. Zanimljive fraktalne primjere dao je Manuel Morán [12].



Slika 3: Zmajevi blizanci

Primjer 7 ([12])**.** Uzmimo kompleksni broj $z = 0.7e^{i7\pi/6}$ te skicirajmo skup postignuća reda $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ u $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Dobiva se fraktal na slici 3, kojega se nekada zove *zmajevi blizanci* (eng. *twindragon*).

U vezi višedimenzionalnih redova jediničnih razlomaka navodimo dosta općeniti rezultat Taoa i autora iz članka [11], koji ne govori mnogo o topološkoj strukturi, osim što garantira da skup postignuća ima nepraznu nutrinu.

Teorem 3 ([11])**.** *Neka je $d \in \mathbb{N}$. Definiramo niz $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ u $\mathbb{R}^d$ tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo*

$$x_n := \Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+d-1}\Big).$$

Tada skup postignuća $A(x)$ reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ima nepraznu nutrinu, tj. sadrži nedegeneriranu d-dimenzionalnu kuglu.[3]

Posebni slučaj u $d = 2$ dimenzije dokazali su Erdős i Ernst Straus, ali nikada nisu objavili dokaz, jer ih je mučila analogna tvrdnja u višim dimenzijama. Autor ovog članka je najprije dokazao trodimenzionalni slučaj

[3]Zapravo se pokazuje i više: nepraznu nutrinu ima već i skup sastavljen od točaka $\sum_{n\in S} x_n$ takvih da je S skup članova dvostruko-eksponencijalno rastućeg niza prirodnih brojeva.

[10] konstruirajući kuglicu radijusa 10^{-24} u skupu $A(x)$. Dokaz općenitog rezultata iz [11] je složeniji i nije tako eksplicitan, ali je i dalje elementaran.

Spomenimo samo jednu direktnu posljedicu posljednjeg teorema.

Primjer 8. Pokažimo da postoji niz potpunih kvadrata $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takav da su

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{b_n - 4} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{b_n - 9}$$

racionalni brojevi.

Naime, skup

$$\mathbb{Q}\sqrt{2} \times \mathbb{Q}\sqrt{2} \times \mathbb{Q}\sqrt{3} \times \mathbb{Q}\sqrt{3}$$

je gust u $\mathbb{R}^4$ pa iz teorema 3 slijedi da postoji strogo rastući niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodnih brojeva većih od 3 takav da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 2} \in \mathbb{Q}\sqrt{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 2} \in \mathbb{Q}\sqrt{2},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - 3} \in \mathbb{Q}\sqrt{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 3} \in \mathbb{Q}\sqrt{3}.$$

Oduzimanjem dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{a_n^2 - 4} \in \mathbb{Q}\sqrt{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{a_n^2 - 9} \in \mathbb{Q}\sqrt{3},$$

tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{a_n^2 - 4} \in \mathbb{Q}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{a_n^2 - 9} \in \mathbb{Q},$$

što je upravo tražena tvrdnja uz $b_n = a_n^2$. $\square$

3 Zadaci za vježbu

Zadatak 1. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergentni red u $\mathbb{R}^d$ s članovima $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, dokažite da je $A(x)$ uvijek kompaktan skup (tj. zatvoren je i ograničen).

Zadatak 2. Dokažite svojevrstan obrat Kakeyinog teorema 1: ako je $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ padajući niz brojeva iz $\langle 0, \infty\rangle$ takav da red $\sum_n x_n$ konvergira i da je $A(x)$ jednak segmentu $[0, \sum_{n=1}^{\infty} x_n]$, tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ mora vrijediti (1).

Zadatak 3. Skup

$$A(x) = \Big\{ \sum_{n\in S} \frac{1}{2^n - 1} \,:\, S \subseteq \mathbb{N} \Big\}$$

iz primjera 4 je tzv. *debeli Cantorov skup*, što znači da ima pozitivnu duljinu (tj. Lebesgueovu mjeru). Dokažite to!

Zadatak 4. Dokažite sljedeće poopćenje (a) dijela Kakeyinog teorema, formulirano u nedavnom članku Tonćija Crmarića i autora [2]. Neka su X_1, X_2, X_3, ... konačni podskupovi od $[0, \infty\rangle$ s barem dva elementa i takvi da $\sum_n \max X_n$ konvergira. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(\max X_k - \min X_k \big)$$

i neka je Δ_n najveća duljina intervala na koje X_n dijeli $[\min X_n, \max X_n]$. Ako vrijedi $r_n \geqslant \Delta_n$ za sve dovoljno velike indekse $n \in \mathbb{N}$, tada je skup

$$\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \,:\, x_n \in X_n \text{ za svaki } n \in \mathbb{N} \Big\}$$

jednak konačnoj uniji nedegeneriranih segmenata. Prvi dio teorema 1 se dobiva u posebnom slučaju $X_n = \{0, x_n\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5. Erdős i Graham [5] su pitali postoji li ograničeni niz prirodnih brojeva $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takav da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + b_n} \in \mathbb{Q}.$$

Iskoristite prethodni zadatak kako biste pokazali da doista postoji takav niz $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, čak štoviše s vrijednostima u skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ovo je posebni slučaj općenitijeg rezultata iz [11].

Zadatak 6. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergentni red s članovima $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ iz $\mathbb{R}^2$.

(a) Može li $A(x)$ biti jednak kvadratu $[0,1]^2$?

(b) Može li $A(x)$ biti jednak trokutu $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geqslant 0, v \geqslant 0, u+v \leqslant 1\}$?

Zadatak 7. Dokažite da postoje niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ i prirodni brojevi $m_1, \ldots, m_6$ takvi da je

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 1} &= \sqrt{m_3} - \sqrt{m_4}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 2} &= \sqrt{m_5} - \sqrt{m_6}. \end{aligned}$$

Zahvale

Ovaj članak nastao je na temelju jednog mojeg predavanja u sklopu fakultativnog predmeta *Studentska natjecanja iz matematike* na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Zahvaljujem studentima koji su slušali predavanje te pokazali interes za gradivo i zadatke. Također zahvaljujem Tonćiju Crmariću na čitanju članka i korisnim komentarima te na zajedničkom znanstvenom radu na istu temu.

Literatura

[1] Artur Bartoszewicz, Małgorzata Filipczak i Franciszek Prus-Wiśniowski, *Topological and algebraic aspects of subsums of series*, Traditional and present-day topics in real analysis, 345–366, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, Łódź, 2013.

[2] Tonći Crmarić i Vjekoslav Kovač, *On the irrationality of certain super-polynomially decaying series*, preprint, 2025. `https://arxiv.org/abs/2504.18712`

[3] Paul Erdős, *On the irrationality of certain series*, Math. Student **36** (1968), 222–226.

[4] Paul Erdős, *On the irrationality of certain series: problems and results*, New advances in transcendence theory (Durham, 1986), Alan Baker (Ed.), 102–109, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[5] Paul Erdős i Ronald L. Graham, *Old and new problems and results in combinatorial number theory*, Monographies de L'Enseignement Mathématique **28**, Université de Genève, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 1980.

[6] Paul Erdős i Ernst G. Straus, *On the irrationality of certain Ahmes series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **27** (1964), 129–133.

[7] Joe A. Guthrie i James E. Nymann, *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*, Colloq. Math. **55** (1988), 323–327.

[8] Sōichi Kakeya, *On the partial sums of an infinite series*, Tôhoku Sci. Rep. **3** (1914), 159–164.

[9] Sōichi Kakeya, *On the set of partial sums of an infinite series*, Proc. Tokyo Math.-Phys. Soc., 2nd ser. **7** (1914), 250–251.

[10] Vjekoslav Kovač, *On the set of points represented by harmonic subseries*, prihvaćen za objavljivanje u Amer. Math. Monthly, 17 pp., 2024. `https://arxiv.org/abs/2405.07681`

[11] Vjekoslav Kovač i Terence Tao, *On several irrationality problems for Ahmes series*, prihvaćen za objavljivanje u Acta Math. Hungar., 37 pp., 2025. `https://arxiv.org/abs/2406.17593`

[12] Manuel Morán, *Fractal series*, Mathematika, **36** (1989), 334–348.

[13] James E. Nymann i Ricardo A. Sáenz, *On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*, Colloq. Math. **83** (2000), 1–4.

[14] Alek D. Weinstein i Boris Zalmanovich Shapiro. *On the structure of the set of $\overline{\alpha}$-representable numbers*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **24** (1980), 8–11.

Vjekoslav Kovač
Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb.

E-mail address: `vjekovac@math.hr`