ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.3 (2020) 87–97

Problem klasifikacije grafova

Anamari Nakić, Ivan Vesel

Sažetak

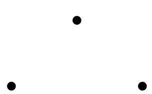
Tema ovog članka je problem klasifikacije grafova. Predstavljeni su osnovni pojmovi teorije grafova, a zatim kombinatorne tehnike kojima se može pokazati da dva grafa nisu izomorfna te su klasificirani svi grafovi s 5 vrhova.

Ključni pojmovi: graf, izomorfni grafovi, klasifikacija grafova

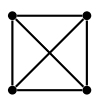
MSC 2010: 05C30

1 Osnovni pojmovi

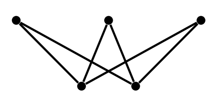
Jednostavni graf G sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$, čije elemente zovemo vrhovi grafa G i konačnog skupa $E(G)$ dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje zovemo bridovi. U ovom ćemo članku jednostavne grafove kraće nazivati grafovima.



Nul graf N_3



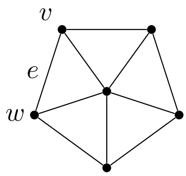
Potpuni graf K_4



Potpuni bipartitni graf K_{23}

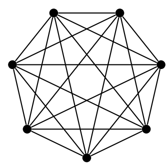
Ako graf G ima $n \geq 1$ vrhova, onda može imati između 0 i $\frac{n(n-1)}{2}$ bridova. Graf bez bridova zovemo nul-graf N_n. Graf koji ima maksimalan broj vrhova i kojem su svaka dva vrha spojena bridom zove se potpuni graf K_n. Ako brid e spaja vrhove v i w kažemo da su vrhovi v

i w susjedni. Tada brid e možemo zapisati i pomoću vrhova koje spaja: vw. Istovremeno, kažemo da je vrh v incidentan s bridom e.



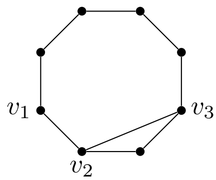
Kotač W_6

Stupanj vrha v grafa G je broj bridova od G koji su incidentni s v. Označavamo ga s $\deg(v)$. Svakom grafu pridružujemo niz stupnjeva. Za graf s n vrhova to je n-torka koja se sastoji od rastućeg niza cijelih brojeva koji predstavljaju stupnjeve svih vrhova u grafu.

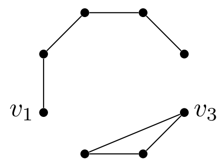


Potpuni graf K_7 ima niz stupnjeva $(6, 6, 6, 6, 6, 6, 6)$

Put u grafu G je konačan niz različitih bridova oblika $v_0v_1,\ v_1v_2,\ \ldots,$ $v_{k-1}v_k$ pri čemu su svaka dva uzastopna brida susjedna i svi vrhovi $v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_k$ su različiti. Navedni put možemo zapisati i u oznaci $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k$. Za primjer je istaknut put u grafu G_1 sa slike $v_1 \to v_2 \to v_3$ između vrhova v_1 i v_3. U grafu G_2 između vrhova v_1 i v_3 nema puta.



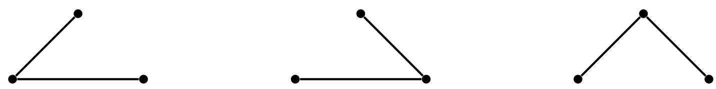
Povezan graf G_1



Nepovezan graf G_2

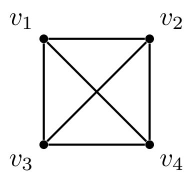
Kažemo da je graf povezan ako postoji put između svaka dva vrha. U suprotnom kažemo da je graf nepovezan. Svaki se nepovezani graf može prikazati kao unija povezanih grafova. U grafu G_1 sa slike postoje putevi između svaka dva vrha pa je povezan, dok je graf G_2 nepovezan.

Jedan od osnovnih problema u kombinatorici je problem prebrajanja elemenata zadanog skupa. Tako se u ovom članku možemo zapitati koliko ima različitih grafova s n vrhova. No, odgovoriti možemo tek kada matematički definiramo kada su dva grafa jednaka, odnosno različita. Primjerice, intuicija nam govori da je na sljedećoj slici prikazan isti graf tri puta: ima tri vrha i dva brida koji povezuju vrhove u lanac.

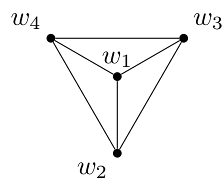


Definicija 1. *Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su izomorfni ako postoji bijekcija $\varphi\colon V(G_1) \to V(G_2)$ između skupova vrhova od G_1 i G_2, takva su vrhovi v i w u G_1 susjedni ako i samo ako su dva korespondentna vrha $\varphi(v)$ i $\varphi(w)$ susjedni u G_2. Takvu bijekciju zovemo izomorfizam grafova.*

Dva grafa na sljedećoj slici su izomorfna. Izomorfizam φ grafova K_4 i T dan je s $\varphi(v_i) = w_i$, za $i = 1, \dots, 4$.



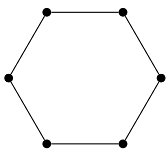
Potpuni graf K_4



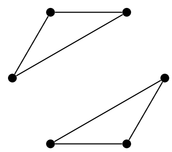
Graf tetraedar T

Jasno je da grafovi koji nemaju jednak broj vrhova ili nemaju jednak broj bridova ne mogu biti izomorfni. S druge strane, dva grafa s jednakim brojem vrhova i jednakim brojem bridova nisu nužno izomorfni. Oba grafa na sljedećoj slici imaju po 5 vrhova i 4 brida. Usprkos tomu nisu izomorfni jer je prvi povezan, a drugi nije. Izomorfizam grafova čuva povezanost.

Nadalje, ako dva grafa imaju različite nizove stupnjeva, nisu izomorfni. Izomorfni grafovi G_1 i G_2 imaju jednake nizove stupnjeva jer za svaki vrh v of G_1 vrijedi $\deg(v) = \deg(\varphi(v))$. No, i grafovi koji imaju pridružene jednake nizove stupnjeva mogu biti neizomorfni. Dva grafa u sljedećem primjeru imaju jednak broj vrhova, jednak broj bridova i jednake nizove stupnjeva, a nisu izomorfni.

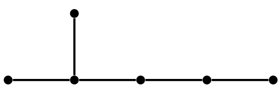


Niz stupnjeva $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$

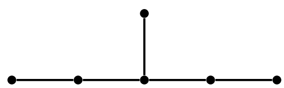


Niz stupnjeva $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$

Sljedeća su dva grafa uz jednak broj vrhova, jednak bridova i jednake nizove stupnjeva, i oba povezana, no nisu izomorfni. U prvom su grafu dva vrha stupnja 2 susjedna, a u drugom grafu nisu.



Niz stupnjeva $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$



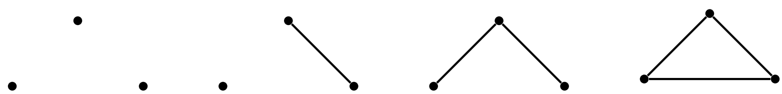
Niz stupnjeva $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$

Sada kada imamo kriterij po kojem razlikujemo grafove, možemo prebrajati koliko ima grafova s n vrhova. Postoji samo jedan graf s $n = 1$ vrhom i to je nul graf N_1. Lagano je pobrojati sve grafove s dva vrha. Ima ih točno dva: jedan nema bridova, a drugi ima jedan brid.

Nul graf N_2

Potpuni graf K_2

Nije teško pobrojati ni sve grafove s tri vrha. Graf s tri vrha može imati 0, 1, 2, ili 3 brida, i za svaku od navedenih opcija postoji jedinstven graf, do na izomorfizam.



Čitateljima ostavljamo da sami ispišu sve grafove s četiri vrha, ima ih 11: pet nepovezanih i šest povezanih.

2 Klasifikacija grafova s 5 vrhova

Prebrajanje skupa svih grafova s pet vrhova nešto je složeniji zadatak. Prvo ćemo pobrojati sve nepovezane, a zatim sve povezane grafove. Pri klasifikaciji vrhova koristit ćemo slavnu Lemu o rukovanju pomoću koje ćemo identificirati sve dopustive nizove stupnjeva grafa s pet vrhova, a onda ćemo, za dani niz stupnjeva, konstruirati sve neizomorfne grafove.

Teorem 2 (Lema o rukovanju)**.** *U svakom grafu G s n vrhova i m bridova zbroj stupnjeva je paran i vrijedi*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m.$$

Dokaz. Brid e koji je incidentan s vrhovima v i w doprinosi s 1 vrijednostima $\deg(v)$ i $\deg(w)$. Stoga svaki brid doprinosi ukupnoj sumi stupnjeva grafa G s 2. Onda ukupna suma stupnjeva grafa G mora biti paran broj, a s obzirom da G ima m bridova, mora biti jednaka $2m$. □

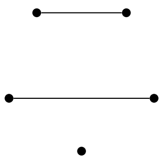
2.1 Nepovezani grafovi s 5 vrhova

U slučajevima kada je broj bridova jednak 0 ili 1 grafovi su jedinstveni.

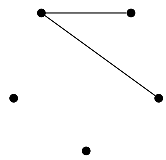
Kada graf G ima dva brida, prema Lemi o rukovanju, za niz stupnjeva $(\deg(v_1), \deg(v_2), \deg(v_3), \deg(v_4), \deg(v_5))$ pridružen grafu G vrijedi

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i) = \deg(v_1) + \cdots + \deg(v_5) = 4,$$

pa su dva moguća niza stupnjeva $(0, 1, 1, 1, 1)$ ili $(0, 0, 1, 1, 2)$. Za svaki od njih postoji po jedan graf.

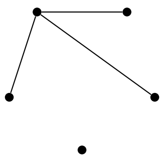


$(0, 1, 1, 1, 1)$

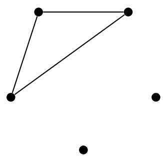


$(0, 0, 1, 1, 2)$

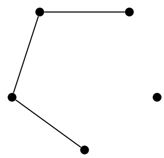
Kada je broj bridova jednak $m = 3$ ukupna suma stupnjeva grafa mora biti jednaka 6. Postoje četiri mogućnosti, a za svaki je dopustivi niz stupnjeva moguće konstruirati jedinstveni graf.



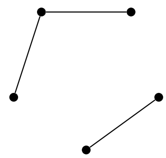
$(0, 1, 1, 1, 3)$



$(0, 0, 2, 2, 2)$

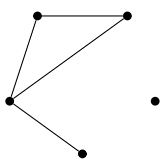


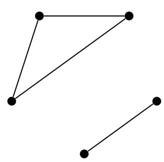
$(0, 1, 1, 2, 2)$

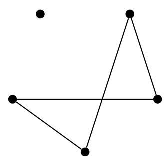


$(1, 1, 1, 1, 2)$

Istim postupkom klasificiramo i nepovezane grafove s 4 brida.

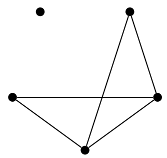




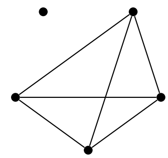


Odredimo sada koliko najviše bridova može imati nepovezani graf s 5 vrhova. Uočimo da će nepovezan graf imati najviše bridova ako je izomorfan grafu koji je unija disjunktnih potpunih grafova. Iscrpnom pretragom dolazimo do sljedećih mogućnosti: $K_4 \cup K_1$, $K_3 \cup K_2$, $K_3 \cup K_1 \cup K_1$, $K_2 \cup K_2 \cup K_1$, $K_2 \cup K_1 \cup K_1 \cup K_1$ i $K_1 \cup K_1 \cup K_1 \cup K_1 \cup K_1$. Svi navedni grafovi su neizomorfni. Prvi graf ima najviše bridova, a to je šest. Ostali grafovi imaju redom 4, 3, 2, 1 i 0 bridova, i već smo ih pobrojali u dosad provedenoj klasifikaciji. Spomenimo još da se može pokazati da nepovezani graf s n vrhova može imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova i da je takav graf izmorfan uniji disjunktnih grafova K_1 i K_{n-1} (za dokaz vidjeti npr. [2]).

Dakle, nepovezani graf s 5 vrhova može imati najviše 6 bridova. Slijede slike jedinstvenih nepovezanih grafova s 5 i 6 bridova.



5 bridova



6 bridova

Zaključujemo da postoji ukupno 13 nepovezanih grafova s 5 vrhova.

Broj bridova	0	1	2	3	4	5	6
Broj grafova	1	1	2	4	3	1	1

2.2 Stabla s 5 vrhova

Graf G zovemo stablo ako između svaka dva vrha od G postoji točno jedan put. Stablo je, dakle, povezan graf.

Ciklus u grafu je put s barem jednim bridom, kojem su početni i završni vrh podudaraju. Može li stablo G imati ciklus? Pretpostavimo da G ima neki ciklus

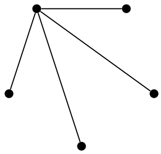
$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1.$$

Tada između vrhova v_1 i v_k postoje dva različita puta $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$ i $v_1 \to v_k$ što je u kontradikciji s definicijom stabla. Dakle, stablo nema ciklusa.

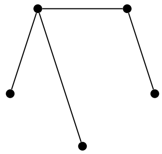
Lema 3. *Stablo s n vrhova ima $n-1$ bridova.*

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova n. Stablo s $n = 1$ vrhom nema niti jednog brida pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svako stablo s manje od n vrhova. Neka je T stablo s n vrhova i neka su v i w dva susjedna vrha povezana bridom e. Uočimo da se jedinstveni put od v do w tada nužno sastoji od samo jednog brida i to je e. Uklanjanjem brida e iz stabla T, uklonit ćemo jedinstveni put između vrhova v i w te ćemo dobiti nepovezan graf koji se sastoji od dva stabla T_1 i T_2 s n_1 i n_2 vrhova. Vrijedi $n_1+n_2 = n$. S obzirom da je $n_1 < n$ i $n_2 < n$ prema pretpostavci indukcije T_1 ima $n_1 - 1$ bridova, a T_2 ima $n_2 - 1$ bridova. Sada možemo zaključiti da stablo T s n vrhova ima $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n - 1$ bridova. □

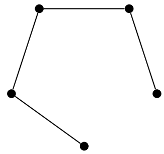
Stablo je povezan graf pa za svaki vrh v vrijedi $\deg(v) \geq 1$, i prema Lemi o rukovanju ukupna suma stupnjeva jednaka je $2(n-1)$. Kada je broj vrhova stabla jednak 5, postoje 3 dopustiva niza stupnjeva i za svaki od njih po jedno stablo. S obzirom da imaju različite nizove stupnjeva, očito su dobiveni grafovi neizomorfni.



$(1,1,1,1,4)$



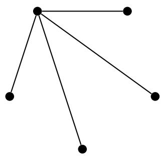
$(1,1,1,2,3)$



$(1,1,2,2,2)$

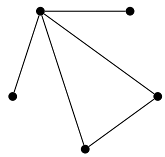
2.3 Povezani grafovi s 5 vrhova i 5 bridova

Dodavanjem jednog brida stablu s n vrhova dobit ćemo graf s n bridova koji ima jedan ciklus. Na primjer, uzmemo li prvo stablo iz prethodnog paragrafa, uočit ćemo da novi brid možemo dodati na $\binom{4}{2} = 6$ načina, spajajući uvijek dva vrha stupnja 1. Svih šest konstruiranih grafova su izomorfni.



$(1,1,1,1,4)$

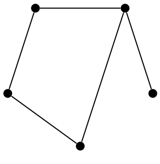
$+$ 1 brid $=$



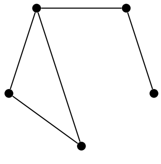
$(1,1,2,2,4)$

U slučaju drugog stabla, dodavanjem jednog brida moguće je konstruirati tri neizomorfna grafa, kao i u slučaju trećeg stabla. Mogli bismo brzopleto zaključiti da neizomorfnih grafova s 5 vrhova i 5 bridova ima sedam, no to je pogrešno. Naime, neke je grafove moguće konstruirati na dva načina, dodavanjem brida različitim stablima.

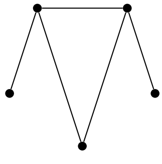
Za $n = 5$ ukupna suma stupnjeva grafa jednaka je 10 i četiri su moguća niza stupnjeva koja daju 5 neizomorfnih grafova. Prvi slučaj smo već skicirali, evo i preostalih grafova. Prva dva grafa imaju isti niz stupnjeva $(1,2,2,2,3)$, ali su neizomorfni. U prvom su grafu jedinstveni vrhovi stupnja 1 i 3 susjedni, a u drugom grafu nisu pa dva grafa ne mogu biti izomorfni.



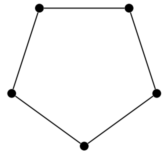
$(1,2,2,2,3)$



$(1,2,2,2,3)$



$(1,1,2,3,3)$

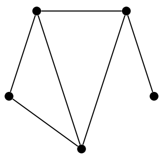


$(2,2,2,2,2)$

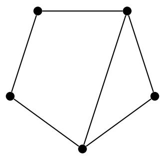
2.4 Povezani grafovi s 5 vrhova i 6 bridova

Komplement grafa G sa skupom vrhova $V(G)$ je graf $\overline{G}$ s istim skupom vrhova $V(G)$, a dva su vrha u $\overline{G}$ susjedna ako i samo ako nisu susjedna u G. Ako je G graf s 5 vrhova i 4 brida, njegov komplement je graf $\overline{G}$ s 5 vrhova i 6 bridova. Neizomorfni grafovi imaju neizomorfne komplemente, i obratno. Stoga ćemo grafove sa 6 bridova pobrojati koristeći klasifikaciju grafova s 4 brida; svaki od njih je komplement jednog od neizomorfnih grafova s 4 brida.

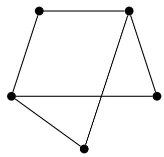
Sjetimo se da grafova s 4 brida ima šest: 3 nepovezana i 3 stabla. Stoga postoji šest grafova s 5 vrhova i 6 bridova. Jedan od dobivenih grafova je nepovezan, a u ovom ćemo paragrafu predstaviti preostalih pet povezanih grafova sa 6 bridova.



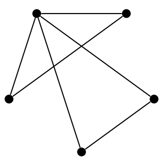
$(1, 2, 3, 3, 3)$



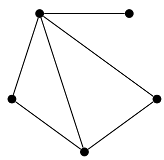
$(2, 2, 2, 3, 3)$



$(2, 2, 2, 3, 3)$



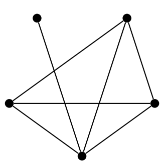
$(2, 2, 2, 2, 4)$



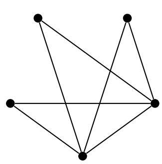
$(1, 2, 2, 3, 4)$

2.5 Grafovi s 5 vrhova i 7 bridova

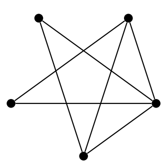
Grafove sa 7 bridova pobrojat ćemo koristeći klasifikaciju grafova s 3 brida; svaki od njih je komplement jednog od neizomorfnih grafova s 3 brida. Postoje 4 grafa sa 7 bridova.



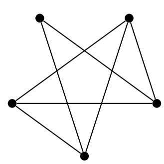
$(1, 3, 3, 3, 4)$



$(2, 2, 2, 4, 4)$



$(2, 2, 3, 3, 4)$



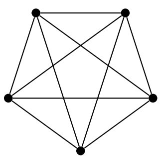
$(2, 3, 3, 3, 3)$

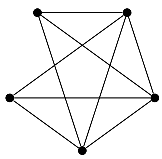
2.6 Grafovi s 5 vrhova i 8, 9 i 10 bridova

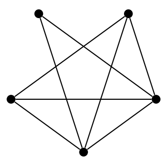
Maksimalan broj bridova povezanog grafa s n vrhova jednak je $\frac{n(n-1)}{2}$. Potpuni graf K_n je jedinstveni graf s n vrhova koji ima maksimalan broj bridova. Za $n = 5$, maksimalan broj bridova jednak je 10.

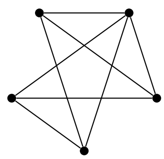
Graf s 5 vrhova i 9 bridova može se konstruirati uklanjanjem jednog brida od K_5. Općenito, graf koji se dobije kada potpunom grafu K_n uklonimo neki brid jedinstven je do na izomorfizam.

Postoje točno dva grafa s 8 bridova. Konstruiraju se iz potpunog grafa K_5 uklanjanjem dva brida: jedan se graf dobije uklanjanjem bridova s jednim zajedničkim vrhom, a drugi se dobije uklanjanjem dva brida bez zajedničkog vrha.


Graf s 10 bridova


Graf s 9 bridova


Graf s 8 bridova


Graf s 8 bridova

Ovime je završena klasifikacija grafova s pet vrhova.

Broj bridova	4	5	6	7	8	9	10
Broj povezanih grafova	3	5	5	4	2	1	1

Teorem 4. *Postoje 34 grafa s pet vrhova: 13 nepovezanih i 21 povezan.*

3 Klasifikacija grafova s većim brojem vrhova

Ne postoje zatvorene formule pomoću kojih bismo mogli izračunati broj grafova s n vrhova ili broj povezanih grafova s n vrhova. Klasifikacija svih grafova, ili samo one povezanih, za zadani broj vrhova je težak matematički problem. Broj neizomorfnih grafova jako brzo raste, već za 11 vrhova prelazi milijardu. Klasifikacije grafova s većim brojem vrhova provedene su djelomično pomoću teorijskih argumenata, a djelomično pomoću računala.

Broj vrhova	Broj povezanih grafova	Broj grafova
1	1	1
2	1	2
3	2	4
4	6	11
5	21	34
6	112	156
7	853	1044
8	11117	12346
9	261080	274668
10	11716571	12005168
11	1006700565	1018997864

Literatura

[1] D. Kreher, D. Stinson, *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search*, CRC Press, 1998.

[2] A. Nakić, M. O. Pavčević, *Uvod u teoriju grafova*, 4. izdanje, Element, Zagreb, 2014.

[3] *Information System on Graph Classes and their Inclusions*, `www.graphclasses.org` (pristupljeno 31. 1. 2020.)

[4] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `oeis.org` (pristupljeno 31. 1. 2020.)

Anamari Nakić
Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb
E-mail adresa: `anamari.nakic@fer.hr`

Ivan Vesel
Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu, Unska 3, 10000 Zagreb
E-mail adresa: `ivan.vesel@fer.hr`

Zaprimljen: 24. veljače 2020.
Prihvaćen: 5. ožujka 2020.