ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.3 (2020) 77–85

O dvije invarijante u analizi

Julije Jakšetić, Josip Lopatič, Petra Potočki, Robert Soldo

Sažetak

U radu su predstavljena dva problema u kojima su invarijante ključan korak u njihovom rješavanju. Rješenja problema su modelirana tehnikama matematičke analize.

Ključni pojmovi: invarijanate, separabilna diferencijana jednadžba, logaritamska spirala

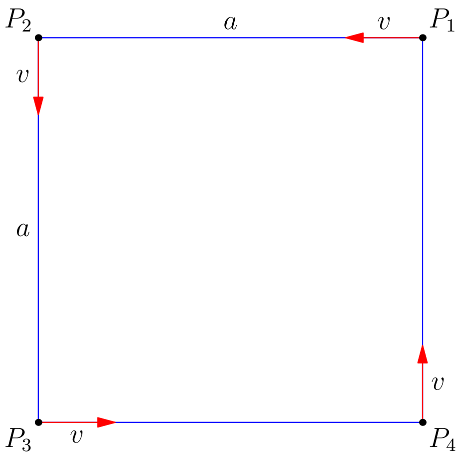
1 Uvod

Invarijante u matematici su vrlo poznat pojam, a znače svojstvo koje se ne mijenja primjenom transformacije. U svakoj grani matematike mogu se naći jednostavni primjeri invarijanti. Na primjer, u linearnoj algebri, smjer vektora je invarijantan na množenje pozitivnim skalarom, u teoriji vjerojatnosti varijanca slučajne varijable je invarijantna na translacije brojem, ili u vektorskoj analizi, euklidska norma je invarijantna na ortogonalne transformacije. Invarijante su često idealan međukorak koji uvelike pojednostavljuje daljni račun, a u natjecateljskoj matematici spadaju u popularne tehnike, te joj je u knjigama [1] i [3] posvećena cijela sekcija.

2 Problem četiri osobe

Ovaj problem u originalu nalazimo u „puzzle" matematici (vidi [4]).

Problem 1. *Četiri osobe P_1, P_2, P_3, P_4 imaju pozicije u četiri vrha kvadrata duljine stranice a, te se počinju kretati direktno prema susjedu, P_1 prema P_2, P_2 prema P_3, P_3 prema P_3, P_4 prema P_1 jednolikom brzinom v (vidi sliku). Koliko vremena je potrebno da se međusobno susretnu? Koliki će put prijeći svatko od njih? Kojim trajektorijoma se gibaju?*

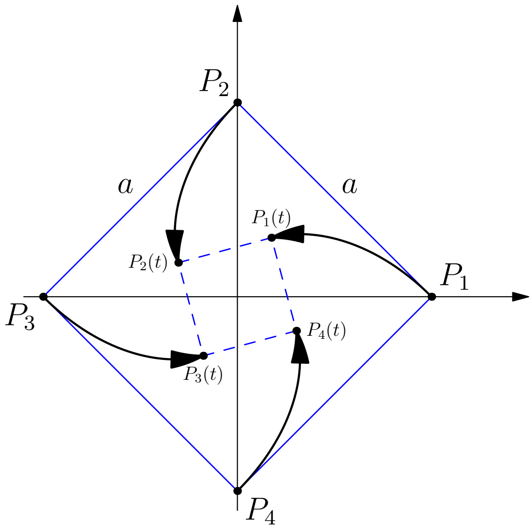


Sličan problem se prvi put spominje 1877. godine u [5], a koji je popularizirao Martin Gardner u [4].
Jedno heurističko, kratko rješenje daje i poznati Hugo Steinhaus [6]: *Kako se svaka osoba kreće okomito na smjer osobe koja ide za njom, a ta osoba ide direktno prema njoj, osoba se primiče svojoj „meti" brzinom v i sustiže ju nakon a/v vremena. Stoga je duljina puta svake osobe, do međusobnog susreta, jednaka a. U svakom momentu kretanja četiri osobe čine vrhove kvarata čija se stranica skraćuje brzinom v. Trajektorije kretanja su oblika logaritamske spirale koje se sijeku u centru kvadrata.*

Ovakvo rješenje ipak zahtjeva malo više analitičkih detalja u zaključcima. Detaljnije rješenje ovog problema, korištenjem polarnog sustava i infinitezimala, daje Strogatz u [7].
U našem rješenju problema koristit ćemo se elementarnom vektorskom analizom kako bismo našli implicitnu jednadžbu kretanja bilo koje od osoba. Kako bismo pronašli trajektoriju kretanja i duljinu puta, prijeći ćemo na polarne koordinate, jer nam daju jednostavniji opis problema.

Rješenje Problema 1.

Uočimo prvo da iz opisa problema, zbog simetrije, slijedi da pozicije osoba uvijek čine vrhove kvadrata, čime smo jednostavno prepoznali invarijantu. Smjestimo kvadrat u koordinatni sustav kao na slici,



te označimo koordinate pozicije osobe P_1 s $P_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ nakon što je prošlo t vremena. Matrica rotacije za $90°$, suprotnog smjera kazaljke na satu, glasi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

U istom vremenskom trenutku t, pozicije osoba $P_2(t),\ P_3(t),\ P_4(t)$ su redom

$$A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ A^2\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, A^3\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Posebno, pozicija osobe P_2, prema kojoj se P_1 kreće, nakon t vremena je

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}.$$

Vektor brzine $\vec{v}(t)$ osobe P_1 u trenutku t je

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \frac{v}{\left\|\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)}\right\|} \cdot \overrightarrow{P_1(t)P_2(t)}, \tag{1}$$

gdje je $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.
Prijeđeni put osobe P_1 nakon t vremena je

$$\int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\mathrm{d}t = vt. \tag{2}$$

Iz (1) slijedi

$$\dot{x} = \frac{-y-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \dot{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{v}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Iz (3) dobivamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y-x}{y+x}.$$

Dakle, trebamo riješiti Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y-x}{y+x}, \\ y\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Supstitucijom $u = \frac{y}{x}$ dobivamo separabilnu diferencijalnu jednadžbu

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\frac{1}{x} \cdot \frac{u^2+1}{u+1}, \\ u\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) &= 0, \end{aligned}$$

koja ima rješenje

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \mathrm{arctg}u = -\ln|x| + \ln\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right). \tag{4}$$

Ekvivalentno, iz (4) slijedi

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right). \tag{5}$$

Jednadžba (5) je implicitno rješenje trajektorije kretanja osobe P_1 u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Zanimljivu interpretaciju te trajektorije dobivamo ako tu jednadžbu zapišemo u polarnom sustavu:

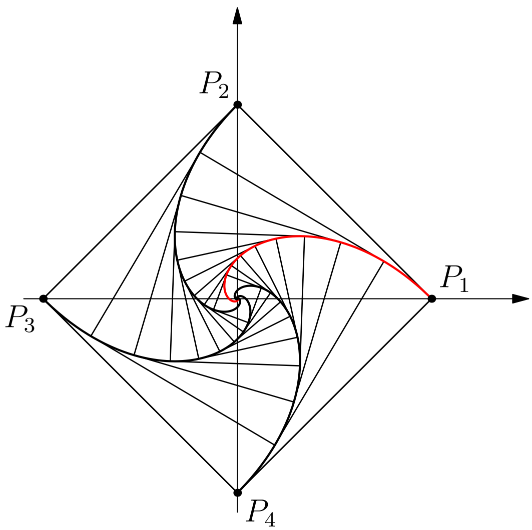
$$r = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\varphi}, \tag{6}$$

što predstavlja poznatu *logaritamsku spiralu*, trajektorije svake od osoba su prikazane dolje na slici.
Da bismo odredili prijeđeni put osobe P_1 moramo odrediti duljinu te logaritamske spirale:

$$s = \int_0^\infty \sqrt{r^2(\varphi) + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \mathrm{d}\varphi = a \int_0^\infty e^{-\varphi} \mathrm{d}\varphi = a. \tag{7}$$

Ostaje nam još dati odgovor na pitanje, koliko vremena treba da se sve četiri osobe susretnu. To dobivamo kombinacijom (2) i (7):

$$vt = a \Rightarrow t = \frac{a}{v}.$$



□

3 Invarijante s nizovima

Sljedeći problem invarijante u analizi vezan je uz slavnog matematičara C. F. Gaussa, koji je svima poznat po svojoj dosjetci invarijante u sumi prvih 100 brojeva: suma prvog i zadnjeg broja daje 101, drugog i predzadnjeg daje 101,... Kako biografi pišu, ovo je Gauss uočio sa sedam godina, a invarijantu, koju ćemo sada navesti, Gauss je otkrio sa samo četrnaest godina (vidi [2]).

Problem 2. *Neka su $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ i $0 < x_0 < y_0$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}. \tag{8}$$

Pokazati da je tada $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos \frac{x_0}{y_0}}$.

Ovaj problem ima oko dvadesetak inačica, uvijek sa zajedničkim limesom koji sadrži neku poznatu funkciju. Na primjer, ako rekurzije (8) zamijenimo s

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n \frac{x_n + y_n}{2}}, \quad y_{n+1} = \sqrt{y_n \frac{x_n + y_n}{2}}. \tag{8'}$$

pokazuje se da je tada $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{y_0^2 - x_0^2}{2 \ln\left(\frac{y_0}{x_0}\right)}$.

Rješenje Problema 2.
Rješenje problema dajemo u tri dijela. U prvom dijelu pokazujemo da se limesi oba niza podudaraju, u drugom identificiramo invarijante, a u trećem prva dva dijela objedinjujemo u jedinstven zaključak.

Tvrdnja 1. *Za nizove (x_n) i (y_n) definirane kao u Problemu 2 vrijedi*

$$x_n < y_n \Rightarrow x_{n+1} < y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz Tvrdnje 1.

$$\begin{gathered}
x_n < y_n \Rightarrow x_n^2 < y_n^2 \Rightarrow \frac{x_n^2 - y_n^2}{4} < 0 \Rightarrow \\
\frac{x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2 - 2x_n y_n - 2y_n^2}{4} < 0 \Rightarrow \\
\frac{(x_n + y_n)^2 - 2y_n(x_n + y_n)}{4} < 0 \Rightarrow \\
x_{n+1}^2 = \left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)^2 < x_{n+1} y_n = y_{n+1}^2.
\end{gathered}$$

Tvrdnja 2. *Za nizove (x_n) i (y_n) definirane kao u Problemu 2 vrijedi*

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{y_n - x_n}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz Tvrdnje 2.

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x_{n+1} &= \sqrt{x_{n+1}y_n} - \frac{x_n + y_n}{2} \\ &\leq \frac{x_{n+1} + y_n}{2} - \frac{x_n + y_n}{2} \\ &= \frac{\frac{x_n+y_n}{2} + y_n}{2} - \frac{x_n + y_n}{2} \\ &= \frac{y_n - x_n}{4}. \end{aligned}$$

Kombinacijom Tvrdnje 1 i Tvrdnje 2 zaključujemo da nizovi (x_n) i (y_n) imaju zajednički limes:

$$0 < y_n - x_n \leq \frac{y_0 - x_0}{4^n} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Tvrdnja 3. *Za nizove (x_n) i (y_n) definirane kao u Problemu 2 vrijedi*

$$2^n \arccos \frac{x_n}{y_n} = \arccos \frac{x_0}{y_0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz Tvrdnje 3. Promotrimo omjer

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}y_n}} = \sqrt{\frac{x_{n+1}}{y_n}} = \sqrt{\frac{\frac{x_n+y_n}{2}}{y_n}} = \sqrt{\frac{1+\frac{x_n}{y_n}}{2}}. \tag{10}$$

Zbog $x_n < y_n$ slijedi $0 < \frac{x_n}{y_n} < 1$, zbog čega možemo definirati novi niz (α_n), sadržan u $[0, \frac{\pi}{2}]$, sa $\cos\alpha_n := \frac{x_n}{y_n}$. Zato iz (10) dobivamo

$$\cos\alpha_{n+1} = \cos\frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} = \cdots = \frac{\alpha_0}{2^n} \Rightarrow 2^n\alpha_n = \alpha_0.$$

Drugim riječima dobivamo invarijantu

$$2^n \arccos \frac{x_n}{y_n} = \arccos \frac{x_0}{y_0}. \tag{11}$$

Tvrdnja 4. *Za nizove (x_n) i (y_n) definirane kao u Problemu 2 vrijedi*

$$2^n \sqrt{y_n^2 - x_n^2} = \sqrt{y_0^2 - x_0^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

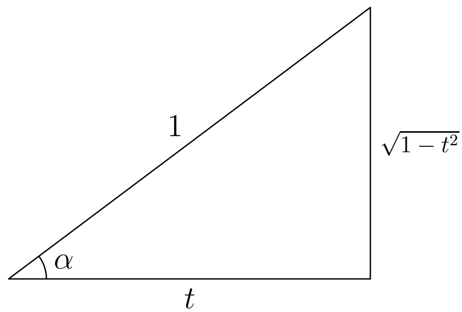
Dokaz Tvrdnje 4. Promotrimo razliku kvadrata $y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2$:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 &= x_{n+1}y_n - \frac{(x_n+y_n)^2}{4} = \frac{x_n + y_n}{2}y_n - \frac{x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2}{4} \\ &= \frac{2x_ny_n + 2y_n^2 - x_n^2 - 2x_ny_n - y_n^2}{4} = \frac{y_n^2 - x_n^2}{4}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $2\sqrt{y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2} = \sqrt{y_n^2 - x_n^2}$ i dobivamo novu invarijantu

$$2^n \sqrt{y_n^2 - x_n^2} = \sqrt{y_0^2 - x_0^2}. \tag{12}$$

Iskoristimo u finalnom dijelu rješenja poznatu činjenicu iz trigonometrije: $\arccos t = \arcsin\sqrt{1-t^2}$ (na slici dolje je $\alpha = \arccos t = \arcsin\sqrt{1-t^2}$).



Zbog toga i invarijanti u Tvrdnjama 3 i 4 imamo:

$$\arccos\frac{x_0}{y_0} = 2^n \arccos\frac{x_n}{y_n} = 2^n \arcsin\frac{\sqrt{y_n^2 - x_n^2}}{y_n} = 2^n \arcsin\frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n y_n}.$$

Limes desne strane prethodne jednakosti, kada n teži u beskonačnost, iznosi

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \arcsin\frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n y_n} = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{y}.$$

Zbog toga je

$$x = y = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos\frac{x_0}{y_0}}.$$

Time je tvrdnja problema dokazana. $\square$

Literatura

[1] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 2000.

[2] B. C. Carlson, *Algorithms involving arithmetic and geometric means*, Amer. Math. Monthly. **78** (1971), 496–505.

[3] A. Engel, *Problem-Solving Strategies (Problem Books in Mathematics)*, Springer, New York, 1998.

[4] M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, New York: Simon and Schuster, 1959.

[5] E. Lucas, *Problem of the Three Dogs*, Nouv. Corresp. Math. **3** (1877), 175–176.

[6] H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, 3rd ed. New York: Dover, p. 136, 1999.

[7] S. Strogatz, *The Calculus of Friendship*, Princeton University Press, 2009.

Julije Jakšetić
Prehrambeno biotehnološki fakultet, Sveučilišta u Zagrebu, Pierottijeva 6, Zagreb
E-mail adresa: julije@math.hr

Josip Lopatič
Veleučilište Baltazar Zaprešić, Vladimira Novaka 23, Zaprešić
E-mail adresa: josiplopatic@gmail.com

Petra Potočki
student PMF-a, Matematički odjel, Sveučilišta u Zagrebu, Bijenička cesta 30, Zagreb
E-mail adresa: petra.potocki94@gmail.com

Robert Soldo
Pružne građevine d.o.o., Međimurska 4, Zagreb
E-mail adresa: Robert.Soldo@prg.hr

Zaprimljen: 31. siječnja 2020.
Prihvaćen: 21. travnja 2020.