

Steinerove trojke

Mateo Hrelja, Anamari Nakić

Abstract

Steinerova trojka reda v sastoji se od v -članog skupa točaka V i skupa \mathcal{B} tročlanih podskupova od V (blokova), takvih da je svaki par točaka sadržan u jednom bloku. U ovom su radu opisana osnovna svojstva i glavni rezultati o Steinerovim trojkama. Dokazano je da Steinerova trojka postoji ako i samo ako je $v = 6t+1$ ili $v = 6t+3$. Predstavljene su Boseova metoda i modificirana Skolemova metoda za konstrukciju Steinerovih trojki. Prikazana je primjena Steinerovih trojki u efikasnom planiranju izvođenja eksperimenata u znanosti i industriji s ciljem smanjenja troškova i olakšavanja provedbe.

Keywords: Steinerova trojka, kvazigrupe

Math. Subj. Class.: 05C30

1 Uvod

Početak istraživanja Steinerovih trojki veže se uz problem Thomasa Kirkmana iz 1847. godine objavljen u radu pod naslovom *On a problem in combinations* [8]. Problem je kasnije dobio naziv *Kirkmanov problem učenica* i glasi: ako 15 učenica svakodnevno izlazi iz škole u tročlanim skupinama, je li moguće izraditi takav raspored izlazaka da u jednom tjednu dvije djevojke izađu zajedno iz škole najviše jedanput. Nekoliko godina kasnije sam Kirkman odgovorio je pozitivno na ovo pitanje [9]. Označimo li djevojke redom

slovima od A do O , sljedeći raspored je jedno od traženih rješenja.

Pon	Uto	Sri	Čet	Pet	Sub	Ned
ABC	ADH	AEM	AFI	AGL	AJN	AKO
DEF	BEK	BHN	BLO	BDJ	BIM	BFG
GHI	CIO	CGK	CHJ	CFM	CEL	CDN
JKL	FLN	DIL	DKM	EHO	DOG	EIJ
MNO	GJM	FJO	EGN	IKN	FHK	HLM

U nastavku teksta postat će jasno da se radi o jednom primjeru Steinerove trojke reda 15 s dodatnim svojstvima. Iako naizgled jednostavan, ovaj je problem otvorio novo poglavlje u kombinatorici, teoriju dizajna, u kojoj se proučavaju problemi egzistencije, konstrukcije i klasifikacije raznih generalizacija Steinerovih trojki te drugih sličnih kombinatornih objekata [3].

Sadržaj ovog rada je sljedeći. U prvom ćemo poglavlju dati pregled osnovnih svojstava Steinerovih trojki. Zatim ćemo uvesti pojmove latinskih kvadrata i kvazigrupa koji se koriste u konstrukciji Steinerovih trojki. Predstaviti ćemo dvije metode za konstrukciju Steinerovih trojki i time razriješiti problem egzistencije. Konačno, prikazat ćemo primjenu Steinerovih trojki u efikasnom planiranju izvođenja eksperimenata.

2 Definicija i osnovna svojstva

Definition 1. *Steinerova trojka (V, \mathcal{B}) reda v sastoji se od skupa V od v točaka i skupa \mathcal{B} tročlanih podskupova od V (blokova), sa svojstvom da je svaki par točaka iz V sadržan u jednom bloku.*

Theorem 2. *U Steinerovoj trojki (V, \mathcal{B}) reda v , svaka je točka sadržana u $r = \frac{v-1}{2}$ blokova.*

Dokaz. Neka je točka $x \in V$ i označimo s r_x broj blokova koji sadrže x . Definiramo skup uređenih parova

$$X = \{(y, B) : y \in V, x \neq y, B \in \mathcal{B}, x, y \in B\}.$$

Prebrojimo elemente od X na dva načina. Prvo, točku y takvu da je $x \neq y$, možemo odabrati na $v-1$ načina. Par točaka x i y sadržan je u točno jednom bloku pa je $|X| = v-1$. S druge strane, postoji r_x blokova koji sadrže x . Za

svaki izbor bloka B postoje dvije točke $y \in B$ takve da je $y \neq x$. Stoga je $|X| = 2r_x$. Zaključujemo da vrijedi

$$|X| = v - 1 = 2r_x \quad \Rightarrow \quad r_x = \frac{v - 1}{2}.$$

S obzirom da je postupak izračuna neovisan o izboru točke x , slijedi tvrdnja teorema. \square

Vrijednost r naziva se *replikacijski broj*. S obzirom da je r prirodan broj, $v - 1$ je nužno paran broj pa vrijedi sljedeći rezultat.

Corollary 3. *Ako postoji Steinerova trojka reda v , onda je v neparan broj.*

Odredimo sada broj blokova Steinerove trojke.

Theorem 4. *Steinerova trojka (V, \mathcal{B}) reda v ima $b = \frac{vr}{3} = \frac{v(v-1)}{6}$ blokova.*

Dokaz. Označimo s b broj blokova. Definiramo skup uređenih parova

$$X = \{(x, B) : x \in V, B \in \mathcal{B}, x \in B\}.$$

Prebrojimo elemente od X na dva načina. Prvo, točku x možemo odabrati na v načina. Svaka je točka sadržana u r blokova pa je $|X| = vr$. S druge strane, postoji b blokova i svaki sadrži tri točke pa je $|X| = 3b$. Zaključujemo da je

$$|X| = vr = 3b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{vr}{3} = \frac{v(v-1)}{6}.$$

\square

Iz dokazanih teorema slijede nužni uvjeti za egzistenciju Steinerovih trojki.

Theorem 5. *Ako postoji Steinerova trojka reda v , onda je $v = 6t + 1$ ili $v = 6t + 3$, $t \geq 1$.*

Dokaz. Prema korolaru 3, red v je neparan broj pa vrijedi $v = 6t + 1$, $v = 6t + 3$ ili $v = 6t + 5$. Prema teoremu 4 broj blokova je jednak $b = v(v-1)/6$, iz čega slijedi da $v(v-1)$ mora biti djeljivo sa šest. Lako se provjeri da je u slučajevima kada je $v = 6t + 1$ ili $v = 6t + 3$ ovaj nužni uvjet zadovoljen. S druge strane, ako pretpostavimo da je $v = 6t + 5$ onda je

$$v(v-1) = (6t+5)(6t+4) = 36t^2 + 54t + 20 = 6(6t^2 + 9t + 3) + 2$$

što nije djeljivo sa šest pa ova vrijednost nije moguća. \square

Kasnije u ovom radu predstaviti ćemo i metode za konstrukciju Steinerovih trojki i pokazati da je nužan uvjet za egzistenciju ujedno i dovoljan.

Example 6. *Za slučaj $v = 6t + 1$, najmanji primjer je Steinerova trojka reda 7 koja se naziva i Fanovom ravninom. Neka je skup točaka dan s*

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Fanova ravnina ima točno 7 blokova koje ćemo sada konstruirati. Bez smanjenja općenitosti, označimo s 1, 2 i 4 tri točke koje ne čine blok. Tada postoje tri različita jedinstvena bloka koji sadrže parove ovih istaknutih točaka $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$. Bez smanjenja općenitosti, označimo redom preostale točke tih blokova s 3, 5, 6. Konstruirali smo blokove

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}.$$

Uočimo da parovi $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$ i $\{3, 4\}$ nisu sadržani u konstruiranim blokovima te da novi blokovi moraju nužno sadržavati preostalu točku 7. Tako dobivamo redom blokove

$$\{1, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}.$$

Konstruirali smo šest blokova, preostaje pronaći još samo jedan blok. Parovi točaka $\{3, 5\}$, $\{3, 6\}$ i $\{5, 6\}$ nisu sadržani niti u jednom dosad konstruiranom bloku pa dodajemo blok $\{3, 5, 6\}$. Lako je provjeriti da je svaki par točaka sadržan u jednom bloku.

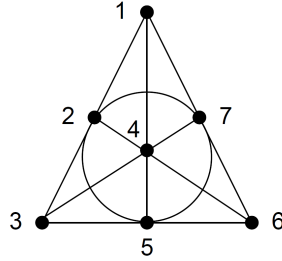
Konačno, skup blokova Fanove ravnine je

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 5, 6\}\}.$$

Konstruirana kombinatorna struktura jedinstvena je do na izbor oznaka točaka. U nastavku rada, radi smanjanja broja zagrada i poboljšanja čitljivosti pisati ćemo

$$\mathcal{B} = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}.$$

S obzirom na mali broj blokova, Fanovu ravninu moguće je elegantno prikazati vizualno u obliku konačne geometrijske strukture.



Slika 1: Fanova ravnina

Example 7. U slučaju $v = 6t + 3$ najmanji primjer je Steinerova trojka reda 9. Neka je dan skup točaka

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Konstruirat ćemo skup \mathcal{B} koji se sastoji od 12 blokova.

Uočimo prvo da ako su dva različita bloka disjunktna sa zadanim blokom, onda su nužno i međusobno disjunktni. Pretpostavimo suprotno, neka je B blok, te B' i B'' blokovi disjunktni s B koji se sijeku u točki $x \notin B$. Dva se bloka Steinerove trojke sijeku u najviše jednoj točki. U suprotnom bi par točaka bio sadržan u dva bloka, a to nije moguće prema definiciji. Prema teoremu 2 točka x sadržana je u četiri bloka, među njima su B' i B'' . Ova se četiri bloka sijeku samo u točki x i sadrže svih devet točaka skupa V . Stoga, od njih četiri, tri bloka sijeku B , a samo je jedan disjunktan s B , što je kontradikcija. Dakle, \mathcal{B} sadrži tri disjunktna bloka. Štoviše, skup \mathcal{B} čine četiri tročlana podskupa disjunktних blokova pri čemu se blokovi iz različitih podskupova sijeku u po jednoj točki. Dva takva podskupa čine kvadratnu mrežu kao na sljedećoj slici. Retci predstavljaju jedan podskup disjunktних blokova, a stupci drugi. Bez smanjenja općenitosti možemo označiti njihove točke tako da su blokovi Steinerove trojke sljedeći 123, 456, 789, 147, 258, 369.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Uočavamo redom koji parovi točaka nisu prisutni u konstruiranim blokovima. Onda je preostalih šest blokova jedinstveno određeno:

- par 15 nije sadržan niti u jednom bloku, a svaka točka osim 9 već se nalazi u zajedničkom bloku s 1 ili 5; stoga 159 mora biti blok;

- par 16 nije sadržan niti u jednom bloku, a svaka točka osim 8 već se nalazi u zajedničkom bloku s 1 ili 6, pa 168 mora biti blok;
- par 24 nije sadržan niti u jednom bloku, a svaka točka osim 9 već se nalazi u zajedničkom bloku s 2 ili 4, pa 249 mora biti blok;
- par 26 nije sadržan niti u jednom bloku, a svaka točka osim 7 već se nalazi u zajedničkom bloku s 2 ili 6, pa 267 mora biti blok;
- par 34 nije sadržan niti u jednom bloku, a svaka točka osim 8 već se nalazi u zajedničkom bloku s 3 ili 4, pa 348 mora biti blok;
- par 35 nije sadržan niti u jednom bloku, a svaka točka osim 7 već se nalazi u zajedničkom bloku s 3 ili 5, pa 357 mora biti blok.

Konačno skup blokova Steinerove trojke reda 9 je sljedeći

$$\mathcal{B} = \{123, 456, 789, 147, 258, 369, 159, 267, 348, 168, 249, 357\}.$$

Steinerove trojke različitih redova v i v' , $v \neq v'$, su očito različite. No, kako prepoznati da su dvije Steinerove trojke istog reda različite?

Definition 8. Neka su $\mathcal{S} = (V, \mathcal{B})$ i $\mathcal{S}' = (V', \mathcal{B}')$ Steinerove trojke. Kažemo da su \mathcal{S} i \mathcal{S}' izomorfni ako postoji bijekcija $\alpha : V \rightarrow V'$ takva da je

$$\{\{\alpha(x) : x \in B\} : B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}'.$$

Bijekciju α zovemo izomorfizam. Ukoliko takva bijekcija ne postoji, onda kažemo da su \mathcal{S} i \mathcal{S}' neizomorfni.

Za vrijednosti $v = 7, 9$ pokazat ćemo da su primjeri koje smo već prethodno naveli u ovom radu jedinstveni.

Proposition 9. [2] Steinerova trojka reda 7 jedinstvena je do na izomorfizam.

Dokaz. Neka je $\mathcal{S} = (V, \mathcal{B})$ Steinerova trojka konstruirana u primjeru 6, te neka su $x_1, x_2, x_4 \in V$ tri točke koje ne čine blok od \mathcal{S} . Označimo preostale točke $x_3, x_5, x_6, x_7 \in V$ kao u primjeru 6.

Neka je sada $\mathcal{S}' = (V', \mathcal{B}')$ druga Steinerova trojka reda 7. Označimo redom s $y_1, y_2, y_4 \in V'$ tri točke koje ne čine blok od \mathcal{S}' . Potom označimo s y_3, y_5, y_6, y_7 preostale točke, na sličan način kao u postupku u primjeru 6 za \mathcal{S} . Tada je preslikavanje $\alpha : V \rightarrow V'$ definirano s $\alpha(x_i) = y_i, i = 1, \dots, 7$, izomorfizam. Stoga zaključujemo da postoji jedinstvena, do na izomorfizam, Steinerova trojka reda 7. \square

Proposition 10. [2] *Steinerova trojka reda 9 jedinstvena je do na izomorfizam.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{S} = (V, \mathcal{B})$ Steinerova trojka konstruirana u primjeru 7, te neka su $x_1, x_2, x_4 \in V$ tri točke koje ne čine blok. Označimo preostale točke kao u postupku provedenom u primjeru 7.

Neka je sada $\mathcal{S}' = (V', \mathcal{B}')$ druga Steinerova trojka reda 9. Označimo redom s $y_1, y_2, y_4 \in V'$ tri točke koje ne čine blok od \mathcal{S}' . Potom označimo preostale točke, na sličan način kao u postupku provedenom u primjeru 7. Uočimo dva tročlana podskupa disjunktih blokova: prvi jedinstveno određen blokom koji sadrži $y_1 y_2$, a drugi blokom koji sadrži $y_1 y_4$. Blokovi jednog podskupa redom sadrže dvije, jednu ili nijednu od točaka y_1, y_2, y_4 i time su jedinstveno određeni.

Preslikavanje $\alpha : V \rightarrow V'$ definirano s $\alpha(x_i) = y_i, i = 1, \dots, 9$, je izomorfizam, u potpunosti određen izborom tri točke koje ne čine blok. Stoga zaključujemo da postoji jedinstvena, do na izomorfizam, Steinerova trojka reda 9.

□

Ovo su jedina dva slučaja u kojima su Steinerove trojke reda v jedinstvene. Za sljedeću dopustivu vrijednost $v = 13$ postoje dvije neizomorfne Steinerove trojke [14]. Oba primjera navest ćemo u nastavku. Neka je $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c\}$ skup točaka. Tada su blokovi dvije neizomorfne trojke dani kao stupci u sljedeće dvije tablice.

0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6
1	3	5	7	9	b	3	4	6	9	a	3	4	6	7	8	6	7	8	6	8	a	7	8	9	7
2	4	6	8	a	c	5	7	8	b	c	9	5	a	c	b	b	a	c	c	9	b	b	a	c	9

0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6
1	3	5	7	9	b	3	4	6	9	a	3	4	6	7	8	6	7	8	6	8	a	7	8	9	7
2	4	6	8	a	c	5	7	8	b	c	9	5	a	b	c	b	c	a	c	9	b	a	b	c	9

Konstrukcija i klasifikacija svih Steinerovih trojki reda v je težak i još uvijek otvoren kombinatorni problem. U sljedećoj tablici navedeni su poznati rezultati za male vrijednosti parametra v [3, 12]. Za ove je vrijednosti reda v provedena potpuna klasifikacija, za sve je ostale vrijednosti poznata samo djelomična klasifikacija. Mnogi drugi poznati rezultati mogu se pronaći u [3].

v	Broj	Izvor
7	1	[2, 3]
9	1	[2, 3]
13	2	[14]
15	80	[6, 10]
19	11084874829	[7]

3 Latinski kvadrati i kvazigrupe

Latinski kvadrati naširoko su istraživana kombinatorna struktura. U ovom ćemo se poglavlju ograničiti samo na one rezultate koji su nam potrebni za konstrukciju Steinerovih trojki. Osnovni nam je cilj upoznati čitatelja s idempotentnim simetričnim kvazigrupama neparnog reda te poluidempotentnim simetričnim kvazigrupama parnog reda.

Definition 11. *Latinski kvadrat reda n je kvadratna matrica reda n koja sadrži elemente iz n -članog skupa S , takva da se svaki element iz S pojavljuje točno jednom u svakom retku i svakom stupcu matrice.*

U sljedećoj tablici prikazan je jedan latinski kvadrat reda 5. Lako je provjeriti da se svaki od elemenata $0, 1, 2, 3, 4$ pojavljuje točno jednom u svakom retku i stupcu.

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

Usko povezane strukture s latinskim kvadratima jesu kvazigrupe.

Definition 12. *Kvazigrupa reda n je uređeni par (S, \circ) , gdje je $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ n -člani skup elemenata, dok je $\circ : S \times S \rightarrow S$ binarna operacija definirana nad skupom S , pri čemu vrijede sljedeća svojstva:*

- $\forall x_i, x_j \in S$: jednađžba $x_i \circ x = x_j$ ima jedinstveno rješenje $x \in S$,
- $\forall x_i, x_j \in S$: jednađžba $y \circ x_i = x_j$ ima jedinstveno rješenje $y \in S$.

Kvazigrupa je u potpunosti definirana svojom tablicom operacija, u kojoj se na poziciji (i, j) nalazi vrijednost $x_i \circ x_j$.

\circ	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	2
3	2	3	4	0	1
4	1	2	3	4	0

Lako je uočiti vezu s latinskim kvadratima.

Theorem 13. *Neka je S n -člani skup i \circ binarna operacija definirana nad S . Uređeni par (S, \circ) je kvazigrupa ako i samo ako je njezina tablica operacija latinski kvadrat reda n .*

Posljedično, latinski kvadrati i kvazigrupe se smatraju ekvivalentnim strukturama. U ovom radu zanimaju nas kvazigrupe sa svojstvima simetričnosti, idempotentnosti i poluidempotentnosti.

Definition 14. *Za kvazigrupu (S, \circ) kažemo da je idempotentna ako je $x \circ x = x$, za svaki $x \in S$.*

Sljedeća tablica operacija dobivena iz latinskog kvadrata definira jednu idempotentnu kvazigrupu reda 5.

\circ	0	1	2	3	4
0	0	3	1	4	2
1	3	1	4	2	0
2	1	4	2	0	3
3	4	2	0	3	1
4	2	0	3	1	4

Definition 15. *Za kvazigrupu (S, \circ) kažemo da je simetrična ako je $x \circ y = y \circ x$, za sve $x, y \in S$.*

Uočimo da prethodni primjer zadovoljava svojstvo simetričnosti, radi se o primjeru jedne simetrične idempotentne kvazigrupe kakve ćemo koristiti prilikom konstrukcije Steinerovih trojki u sljedećem poglavlju.

Lemma 16. *Svaka simetrična idempotentna kvazigrupa je neparnog reda.*

Dokaz. Neka je (S, \circ) simetrična idempotentna kvazigrupa reda n . Neka je $z \in S$ i

$$X = \{(x, y) : x \circ y = z\}.$$

Kvazigrupa je idempotentna iz čega slijedi da je $(x, x) \in X$ ako i samo ako je $x = z$. Zatim, kvazigrupa je simetrična te je $(x, y) \in X$ ako i samo ako je $(y, x) \in X$. Stoga je

$$\{\{x, y\} : x \neq y, x \circ y = z\}$$

particija skupa $S \setminus \{z\}$ u dvočlane podskupove. Slijedi da je $|S| - 1 = n - 1$ paran broj i n neparan. \square

Primjere simetričnih kvazigrupa možemo konstruirati pomoću modularne aritmetike [13]. Za zadani prirodni broj n , svaki se prirodni broj m može jedinstveno zapisati u obliku $m = kn + r$, $r \in \{0, \dots, n-1\}$. Broj r zovemo ostatkom pri dijeljenju s n i pišemo $m \equiv r \pmod{n}$. Uočimo da postoji točno n različitih ostataka pri dijeljenju s n i to su redom: $0, \dots, n-1$. Čitatelja koji želi znati više o teoriji brojeva i modularnoj aritmetici upućujemo na knjigu [5].

Neka je $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ skup ostataka pri dijeljenju s n i neka je zbrajanje definirano pravilom

$$x + y = (x + y) \pmod{n}.$$

Tada je $(\mathbb{Z}_n, +)$ kvazigrupa, i to simetrična jer je definirana operacija zbrajanja komutativna. No, definirana operacija nije i idempotentna. Možemo to uočiti u tablici operacija već za $(\mathbb{Z}_3, +)$.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Na dijagonali se nalaze svi različiti elementi, ali u pogrešnom poretku jer ne vrijedi $x \circ x = x$, za svaki x . Na istom skupu \mathbb{Z}_n definiramo novu operaciju [13]

$$x \circ y = \left(\frac{n+1}{2} \right) (x + y) \pmod{n}$$

koja daje simetričnu idempotentnu kvazigrupu (\mathbb{Z}_n, \circ) . Evo primjera tablice operacija za (\mathbb{Z}_3, \circ) .

\circ	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2

Prethodna razmatranja omogućuju da iskažemo sljedeći teorem.

Theorem 17. *Za svaki neparan broj n , postoji simetrična idempotentna kvazigrupa reda n .*

Dokazali smo da ne postoji simetrična idempotentna kvazigrupa parnog reda n . U tom slučaju zanimat će nas poluidempotentne kvazigrupe.

Definition 18. Za kvazigrupu (S, \circ) reda n kažemo da je poluidempotentna ako za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$x \circ x = \begin{cases} x & , \text{ ako } 0 \leq x < \frac{n}{2}, \\ x - \frac{n}{2} & , \text{ ako } \frac{n}{2} \leq x < n. \end{cases}$$

U nastavku dajemo tablicu operacija jedne simetrične poluidempotentne kvazigrupe reda 8.

\circ	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	4	1	5	2	6	3	7
1	4	1	5	2	6	3	7	0
2	1	5	2	6	3	7	0	4
3	5	2	6	3	7	0	4	1
4	2	6	3	7	0	4	1	5
5	6	3	7	0	4	1	5	2
6	3	7	0	4	1	5	2	6
7	7	0	4	1	5	2	6	3

Idempotentna kvazigrupa na skupu \mathbb{Z}_n na dijagonali ima redom elemente $0, 1, \dots, n-1$, dok se kod poluidempotentne kvazigrupe na dijagonali pojavljuju redom $0, 1, \dots, \frac{n}{2}-1, 0, 1, \dots, \frac{n}{2}-1$.

Neka je sada n paran broj, i uočimo da $(\mathbb{Z}_n, +)$ nije poluidempotentna kvazigrupa. Na primjer, u tablici operacija od $(\mathbb{Z}_6, +)$ na dijagonali se pojavljuju samo parni elementi dvaput zaredom.

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Kako bismo konstruirali poluidempotentnu kvazigrupu definirat ćemo binarnu operaciju \circ na \mathbb{Z}_n na sljedeći način [13]

$$x \circ y = \pi((x + y) \pmod{n})$$

pri čemu je permutacija $\pi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ dana s

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \text{ ako je } x \text{ paran,} \\ \frac{x+n-1}{2} & , \text{ ako je } x \text{ neparan.} \end{cases}$$

Primjenom permutacije π elementi na dijagonali poredaju se u redoslijed svojstven poluidempotentnoj operaciji i sada je (\mathbb{Z}_n, \circ) kvazigrupa sa željenim svojstvima. Prethodna razmatranja omogućuju da iskažemo sljedeći teorem.

Theorem 19. *Simetrična poluidempotentna kvazigrupa reda n postoji za svaki parni broj n .*

U nastavku je prikazano kako pomoću ovdje opisanih kvazigrupa konstruirati Steinerove trojke.

4 Konstrukcija Steinerovih trojki

U radu smo već pokazali da je nužni uvjet za egzistenciju Steinerovih trojki da vrijedi $v = 6t + 1$ ili $v = 6t + 3$. Ova dva slučaja promatrat ćemo odvojeno. U nastavku su prikazane dvije najpoznatije metode: Boseova konstrukcija, koja se koristi za slučaj $v = 6t + 3$, te modificirana Skolemova konstrukcija za slučaj $v = 6t + 1$. Posljedično, dokazat ćemo da su nužni uvjeti za egzistenciju ujedno i dovoljni te da vrijedi sljedeći teorem.

Theorem 20. *Steinerova trojka reda v postoji ako i samo ako je $v = 6t + 1$ ili $v = 6t + 3$.*

4.1 Boseova konstrukcija za slučaj $v = 6t + 3$

Neka je $v = 6t + 3, t \geq 1$, te neka je $(\mathbb{Z}_{2t+1}, \circ)$ simetrična idempotentna kvazigrupa reda $2t + 1$. Neka je

$$V = \{1, \dots, v\}.$$

Svaki se prirodan broj $n \leq v$ može na jedinstven način zapisati u obliku $n = 3x + i + 1, x \in \mathbb{Z}_{2t+1}, i \in \mathbb{Z}_3$. Stoga je preslikavanje $f : \mathbb{Z}_{2t+1} \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow V$ zadano s

$$f(x, i) = 3x + i + 1$$

bijekcija. Konstruiramo dva tipa blokova na sljedeći način:

1. za svaki $x \in \mathbb{Z}_{2t+1}$ neka je

$$A_{v,x} = \{f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2)\},$$

2. za sve $x, y \in \mathbb{Z}_{2t+1}$, takve da je $x < y$, te za svaki $i \in \mathbb{Z}_3$, neka je

$$B_{v,x,y,i} = \{f(x, i), f(y, i), f(x \circ y, (i + 1) \bmod 3)\}.$$

Stavimo

$$A_v = \{A_{v,x} : x \in \mathbb{Z}_{2t+1}\}$$

i uočimo da se sastoji od $2t + 1$ blokova. Neka je sada

$$B_v = \{B_{v,x,y,i} : x, y \in \mathbb{Z}_{2t+1}, x < y, i \in \mathbb{Z}_3\}$$

koji se sastoji od $3 \binom{2t+1}{2} = \frac{6t(2t+1)}{2} = 3t(2t + 1)$ blokova.

Pokazat ćemo da je uređeni par (V, \mathcal{B}) Steinerova trojka reda v , gdje je

$$\mathcal{B} = A_v \cup B_v.$$

Theorem 21. [1] *Postoji Steinerova trojka reda v za sve $v = 6t + 3$.*

Dokaz. Neka su V i \mathcal{B} skupovi konstruirani na način opisan u ovom poglavlju. Tvrdimo da je (V, \mathcal{B}) Steinerova trojka reda v stoga je potrebno pokazati da je svaki par točaka sadržan u jednom bloku.

Neka su $f(\alpha, j)$ i $f(\beta, k)$ dva različita elementa iz konstruiranih blokova. Ako je $\alpha = \beta$, onda je nužno $j \neq k$, iz čega slijedi da je ovaj par točaka sadržan samo u bloku A_α . Ako je $\alpha \neq \beta$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha < \beta$. Moguća su sljedeća tri slučaja.

1. Ako je $j = k$, onda je ovaj par točaka sadržan samo u bloku $B_{v,\alpha,\beta,j}$.
2. Ako je $k = (j + 1) \bmod 3$, uočimo prvo da jednačba $x \circ \alpha = \beta$ ima jedinstveno rješenje $x = \gamma$. S obzirom da je $(\mathbb{Z}_{2t+1}, \circ)$ idempotentna kvazigrupa i $\alpha \neq \beta$, nužno vrijedi $\gamma \neq \alpha$. Ako je $\gamma < \alpha$, onda je par točaka $f(\alpha, j)$, $f(\beta, k)$ sadržan samo u bloku $B_{v,\gamma,\alpha,j}$. Ako je $\alpha < \gamma$, onda je, zbog simetričnosti kvazigrupe $(\mathbb{Z}_{2t+1}, \circ)$, par točaka $f(\alpha, j)$, $f(\beta, k)$ sadržan samo u bloku $B_{v,\alpha,\gamma,j}$.

3. Ako je $j = (k + 1) \bmod 3$, uočimo prvo da jednađžba $x \circ \beta = \alpha$ ima jedinstveno rješenje $x = \gamma$. S obzirom da je $(\mathbb{Z}_{2t+1}, \circ)$ idempotentna kvazigrupa i $\alpha \neq \beta$, nužno vrijedi $\gamma \neq \beta$. Ako je $\gamma < \beta$, onda je par $f(\alpha, j), f(\beta, k)$ sadržan samo u bloku $B_{v,\gamma,\beta,k}$. Ako je $\beta < \gamma$, onda je, zbog simetričnosti kvrazigrupe $(\mathbb{Z}_{2t+1}, \circ)$, par točaka $f(\alpha, j), f(\beta, k)$ sadržan samo u bloku $B_{v,\beta,\gamma,k}$.

Stoga je (V, \mathcal{B}) Steinerova trojka reda v . □

U nastavku ćemo konstruirati Steinerovu trojku reda $v = 6t + 3 = 15$ koristeći Boseovu metodu. Neka je (\mathbb{Z}_5, \circ) simetrična idempotentna kvazigrupa sa sljedećom tablicom operacija.

\circ	0	1	2	3	4
0	0	3	1	4	2
1	3	1	4	2	0
2	1	4	2	0	3
3	4	2	0	3	1
4	2	0	3	1	4

Odredimo sada djelovanje preslikavanja $f(x, i) = 3x + i + 1$.

$i \backslash x$	0	1	2	3	4
0	1	4	7	10	13
1	2	5	8	11	14
2	3	6	9	12	15

Konstruiramo redom 5 blokova prvog tipa. Možemo primijetiti da svaki stupac tablice preslikavanja f predstavlja jedan blok u skupu A_{15} :

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11, 12\}, \{13, 14, 15\}.$$

Zatim konstruiramo 30 blokova drugog tipa i skup B_{15} .

$(x, y) \setminus i$	0	1	2
(0, 1)	{1, 4, 11}	{2, 5, 12}	{3, 6, 10}
(0, 2)	{1, 7, 5}	{2, 8, 6}	{3, 9, 4}
(0, 3)	{1, 10, 14}	{2, 11, 15}	{3, 12, 13}
(0, 4)	{1, 13, 8}	{2, 14, 9}	{3, 15, 7}
(1, 2)	{4, 7, 14}	{5, 8, 15}	{6, 9, 13}
(1, 3)	{4, 10, 8}	{5, 11, 9}	{6, 12, 7}
(1, 4)	{4, 13, 2}	{5, 14, 3}	{6, 15, 1}
(2, 3)	{7, 10, 2}	{8, 11, 3}	{9, 12, 1}
(2, 4)	{7, 13, 11}	{8, 14, 12}	{9, 15, 10}
(3, 4)	{10, 13, 5}	{11, 14, 6}	{12, 15, 4}

Svih 35 blokova ove Steinerove trojke reda 15 prikazano je u sljedećim tablicama.

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
2	4	5	6	8	9	10	4	5	6	7	9	11	4	5	6	7
3	11	7	15	13	12	14	13	12	8	10	14	15	9	14	10	15

3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	8	9	10	13
8	12	5	7	8	12	8	9	10	7	9	11	8	11	12	10	11	14
11	13	6	14	10	15	15	11	13	12	13	14	9	13	14	15	12	15

4.2 Modificirana Skolemova konstrukcija za slučaj $v = 6t + 1$

Neka je sada $v = 6t + 1$ i neka je (\mathbb{Z}_{2t}, \circ) simetrična poluidempotentna kvazigrupa reda $2t$. Neka je

$$V = \{1, 2, \dots, v - 1\} \cup \{\infty\}.$$

Kao i u prethodnom poglavlju, koristit ćemo bijekciju $f : \mathbb{Z}_{2t} \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow V \setminus \{\infty\}$ definiranu s

$$f(x, i) = 3x + i + 1.$$

Konstruiramo tri tipa blokova, od kojih su prva dva analogna onima konstruiranim u Boseovoj konstrukciji:

1. za svaki $0 \leq x < t$,

$$A_{v,x} = \{f(x, 0), f(x, 1), f(x, 2)\},$$

2. za sve $x, y \in \mathbb{Z}_{2t}$, takve da je $x < y$, te za svaki $i \in \mathbb{Z}_3$ neka je

$$B_{v,x,y,i} = \{f(x, i), f(y, i), f(x \circ y, (i + 1) \mod 3)\},$$

3. za svaki $0 \leq x \leq t$ te za svaki $i \in \mathbb{Z}_3$ neka je

$$C_{v,x,i} = \{\infty, f(x + t, i), f(x, (i + 1) \mod 3)\}.$$

Stavimo

$$A_v = \{A_{v,x} : 0 \leq x < t\}$$

i uočimo da se sastoji od t blokova. Neka je

$$B_v = \{B_{v,x,y,i} : x, y \in \mathbb{Z}_{2t}, x < y, i \in \mathbb{Z}_3\}$$

skup, sastoji se od $3\binom{2t}{2} = 3t(2t - 1)$ blokova, a skup

$$C_v = \{C_{v,x,i} : 0 \leq x < t, i \in \mathbb{Z}_3\}.$$

se sastoji od $3t$ blokova. Pokazat ćemo da je (V, \mathcal{B}) Steinerova trojka reda v , gdje je

$$\mathcal{B} = A_v \cup B_v \cup C_v.$$

Theorem 22. [11] *Postoji Steinerova trojka reda v za sve $v = 6t + 1$.*

Dokaz. Tvrdimo da je konstruirani uređeni par (V, \mathcal{B}) Steinerova trojka reda v . Dovoljno je pokazati da je svaki par točaka iz V sadržan u jednom bloku.

Za početak, uzmimo elemente $f(\alpha, j)$ i ∞ . Ako je $\alpha < t$, onda je ovaj par točaka sadržan samo u bloku $C_{v,\alpha,(j-1) \mod 3}$. Ako je $\alpha \geq t$, onda je ovaj par sadržan samo u bloku $C_{v,\alpha-t,j}$.

Uzmimo sada dva različita elementa $f(\alpha, j)$ i $f(\beta, k)$. Ako je $\alpha = \beta$, onda je nužno $j \neq k$. U slučaju $\alpha = \beta < t$, ovaj je par sadržan samo u bloku $A_{v,\alpha}$. U slučaju $\alpha = \beta \geq t$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $k = (j + 1) \mod 3$. (\mathbb{Z}_{2t}, \circ) je simetrična kvazigrupa pa jednačba $\alpha \circ x = \alpha$ ima jedinstveno rješenje $x = \gamma$. Ako je $\gamma > \alpha$, onda je ovaj par točaka sadržan samo u bloku $B_{v,\alpha,\gamma,j}$. Ako je $\gamma < \alpha$, ovaj je par točaka sadržan samo u bloku $B_{v,\gamma,\alpha,j}$.

Ako je $\alpha \neq \beta$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha < \beta$. Moguća su sljedeća tri slučaja.

1. Ako je $k = j$, ovaj je par točaka sadržan samo u bloku $B_{v,\alpha,\beta,j}$.

2. Ako je $k = (j + 1) \pmod{3}$, prvo uočimo da jednađžba $x \circ \alpha = \beta$ ima jedinstveno rješenje $x = \gamma$. Nadalje, vrijedi $\gamma \neq \alpha$ jer je $\alpha < \beta$ i $\alpha \circ \alpha = \alpha$. Ako je $\gamma < \alpha$, par točaka $f(\alpha, j)$, $f(\beta, k)$ sadržan je samo u bloku $B_{v,\gamma,\alpha,j}$. Ako je $\gamma > \alpha$, par točaka $f(\alpha, j)$, $f(\beta, k)$ sadržan je samo u bloku $B_{v,\alpha,\gamma,j}$, jer je (\mathbb{Z}_{2t}, \circ) simetrična kvazigrupa.
3. Ako je $j = (k + 1) \pmod{3}$, onda jednađžba $x \circ \beta = \alpha$ ima jedinstveno rješenje $x = \gamma$. S obzirom da je (\mathbb{Z}_{2t}, \circ) simetrična poluidempotentna kvazigrupa, relacija $\gamma = \beta$ vrijedi ako i samo ako je $\beta = \alpha + t$. U tom slučaju, par točaka $f(\alpha, j)$, $f(\beta, k)$ sadržan je samo u bloku $C_{v,\alpha,k}$. Ako je $\gamma < \beta$, par točaka $f(\alpha, j)$, $f(\beta, k)$ sadržan je samo u bloku $B_{v,\gamma,\beta,k}$. Ako je $\gamma > \beta$, par točaka $f(\alpha, j)$, $f(\beta, k)$ sadržan je samo u bloku $B_{v,\beta,\gamma,k}$.

Ovim smo pokazali da je (V, \mathcal{B}) Steinerova trojka reda v . \square

U nastavku dajemo primjer konstrukcije Steinerove trojke reda $v = 6t + 1 = 19$. Element ∞ možemo tretirati kao maksimalnu vrijednost, $v = 19$. Tablica operacija simetrične poluidempotentne kvazigrupe (\mathbb{Z}_6, \circ) je sljedeća.

\circ	0	1	2	3	4	5
0	0	3	1	4	2	5
1	3	1	4	2	5	0
2	1	4	2	5	0	3
3	4	2	5	0	3	1
4	2	5	0	3	1	4
5	5	0	3	1	4	2

Tablica preslikavanja f je sljedeća.

$i \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	1	4	7	10	13	16
1	2	5	8	11	14	17
2	3	6	9	12	15	18

Konstruiramo tri bloka skupa A_{19} koji odgovaraju prvih $t = 3$ stupaca prethodne tablice:

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}.$$

Zatim konstruiramo 45 blokova skupa B_{19} .

$(x, y) \setminus i$	0	1	2
(0, 1)	{1, 4, 11}	{2, 5, 12}	{3, 6, 10}
(0, 2)	{1, 7, 5}	{2, 8, 6}	{3, 9, 4}
(0, 3)	{1, 10, 14}	{2, 11, 15}	{3, 12, 13}
(0, 4)	{1, 13, 8}	{2, 14, 9}	{3, 15, 7}
(0, 5)	{1, 16, 17}	{2, 17, 18}	{3, 18, 16}
(1, 2)	{4, 7, 14}	{5, 8, 15}	{6, 9, 13}
(1, 3)	{4, 10, 8}	{5, 11, 9}	{6, 12, 7}
(1, 4)	{4, 13, 17}	{5, 14, 18}	{6, 15, 16}
(1, 5)	{4, 16, 2}	{5, 17, 3}	{6, 18, 1}
(2, 3)	{7, 10, 17}	{8, 11, 18}	{9, 12, 16}
(2, 4)	{7, 13, 2}	{8, 14, 3}	{9, 15, 1}
(2, 5)	{7, 16, 11}	{8, 17, 12}	{9, 18, 10}
(3, 4)	{10, 13, 11}	{11, 14, 12}	{12, 15, 10}
(3, 5)	{10, 16, 5}	{11, 17, 6}	{12, 18, 4}
(4, 5)	{13, 16, 14}	{14, 17, 15}	{15, 18, 13}

U sljedećoj tablici navedeno je svih 9 blokova skupa C_{19} .

$x \setminus i$	0	1	2
0	{19, 10, 2}	{19, 11, 3}	{19, 12, 1}
1	{19, 13, 5}	{19, 14, 6}	{19, 15, 4}
2	{19, 16, 8}	{19, 17, 9}	{19, 18, 7}

Konačno, neka je $\mathcal{B} = A_{19} \cup B_{19} \cup C_{19}$ i uređeni par (V, \mathcal{B}) je Steinerova trojka reda 19. Evo svih 57 blokova.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
2	4	5	6	8	9	10	12	16	4	4	5	6	7	9	10	11	17	4	5
3	11	7	18	13	15	14	19	17	16	12	8	13	14	19	15	18	18	9	17

3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
6	7	8	11	12	16	5	7	8	12	13	15	8	9	10	13	14	18	7	9
10	15	14	19	13	18	6	14	10	18	17	19	15	11	16	19	18	12	13	13

6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	11	13	13	14	14
11	14	15	8	10	11	18	11	12	16	10	12	17	11	12	12	14	15	15	15
17	19	16	9	17	16	19	18	17	19	18	16	19	13	15	14	16	18	17	17

5 Primjena Steinerovih trojki u planiranju i izvođenju eksperimenata

Osim lijepe matematičke teorije, Steinerove trojke imaju niz primjena u znanosti i industriji, primjerice u kodiranju podataka, kriptografiji i testiranju

softvera. Najpoznatija je primjena u planiranju i dizajniranju eksperimenata. Osnovna je ideja značajno smanjiti broj potrebnih eksperimenata prilikom testiranja kombinacija ulaznih podataka, uz minimalni statistički gubitak kod provedbe samih eksperimenata. U nastavku je dan ilustrativan primjer.

Example 23. *Automobilska tvrtka proizvodi novu leguru za određene dijelove svojih automobila. Kako bi uskladili troškove proizvodnje i efikasnost odlučeno je da će se legura izraditi od kombinacije 3 metala. Na raspolaganju je n metala te je potrebno kroz niz eksperimenata odlučiti o najoptimalnijoj kombinaciji. Istovremeno, potrebno je ispitati kemijsku stabilnost legure, odnosno kakva je međusobna interakcija svaka dva para metala, kako bi se izbjegle kombinacije elemenata koji su međusobno negativno reaktivni. Provedba eksperimenta ograničena je troškovima, duljinom trajanja testiranja, količinom materijala, raspoloživim osobljem te kapacitetom laboratorija u kojem se provodi.*

Prvi pristup je izraditi sve legure sastavljene od tri metala. Njih ima koliko i tročlanih podskupova n -članog skupa

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

U tom ćemo slučaju iscrpno testirati sve kombinacije tri metala, te istovremeno međusobnu interakciju parova metala. No, uočavamo da je moguć i drugi pristup, orijentiran na uštedu resursa. Naime, modeliramo li eksperimente kao blokove jedne Steinerove trojke reda n , provest će se

$$\frac{n(n-1)}{6}$$

eksperimenata. Iako se na ovaj način neće testirati sve kombinacije tri metala, ipak će se testirati interakcija svih parova metala, stoga će statistički gubitak biti minimalan. Ukupni troškovi te duljina trajanja testiranja, kao i količina materijala i potrebni kapacitet laboratorija bit će $n - 2$ puta manji. U sljedećoj navodimo za ilustraciju razlike u broju eksperimenata za male

vrijednosti parametra n .

n	$\binom{n}{3}$	$\frac{n(n-1)}{6}$
7	35	7
9	84	12
13	286	26
15	455	35
19	969	57
97	147440	1552
99	156849	1617

Poglavlje ćemo završiti jednim primjerom plana eksperimenata za ispitivanje legure od tri metala. Na raspolaganju je ukupno 25 metala čije je kombinacije i interakciju potrebno testirati. Provedba eksperimenata dizajniranih iz blokova Steinerove trojke reda 25 kojih je 100, nasuprot iscrpnih 2300, omogućuje uštedu resursa uz prihvatljiv gubitak informacija.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	4	5	6	8	9	10	11	12	15	16	22	4	5	6	7	9	10	11	12
3	14	7	24	13	21	17	19	18	25	20	23	22	15	8	19	14	16	18	20

2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
13	17	23	4	5	6	7	8	10	11	12	14	18	22	5	7	8	11	12	13
25	21	24	9	23	13	15	20	21	17	16	25	19	24	6	17	10	16	24	20

4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	7
15	18	19	8	9	10	12	13	14	16	20	7	9	10	11	14	15	17	21	8
21	25	23	18	11	22	17	19	21	25	24	12	16	18	23	20	19	25	22	9

7	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	10	10
10	11	14	16	18	21	11	12	15	16	17	19	10	12	13	17	18	20	11	13
20	13	22	23	24	25	21	14	23	22	24	25	15	19	24	23	22	25	12	23

10	10	11	11	11	12	12	12	13	13	13	14	14	15	16	16	17	19	19	20
14	24	14	15	22	13	15	23	14	15	17	15	18	16	17	18	18	20	21	21
19	25	24	20	25	21	22	25	16	18	22	17	23	24	19	21	20	22	24	23

U ovom smo članku predstavili tek osnovne rezultate o Steinerovim trojkama. Čitatelju koji želi dalje dublje samostalno proučavati temu preporučujemo knjigu [4].

Literatura

- [1] R. C. Bose, On the Construction of Balanced Incomplete Block Designs. Annals of Eugenics, 9, (1939) 353–399.
- [2] P. J. Cameron, Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms. Cambridge University Press, 1994.

- [3] C.J. Colbourn, J.H. Dinitz, Handbook of Combinatorial Designs. Taylor & Francis, 2006.
- [4] C.J. Colbourn, A. Rosa, Triple Systems. Clarendon Press, Oxford mathematical monographs, 1999.
- [5] A. Dujella, Teorija brojeva. Školska knjiga, Zagreb, 2019.
- [6] S. Kageyama, A survey of resolvable solutions of balanced incomplete block designs. Rev. Inst. Internat. Statist. 40, (1972) 269–273.
- [7] P. Kaski, P. R. J. Ostergaard, The Steiner triple systems of order 19. Math. Comp. 73, (2004) 2075–2092.
- [8] T. P. Kirkman, On a problem in combinations. Cambridge and Dublin Math. J. 2, (1847) 191–204.
- [9] T. P. Kirkman. Note on an unanswered prize question. The Cambridge and Dublin Math. J. 5, (1850) 255–262.
- [10] R. A. Mathon, K. T. Phelps, A. Rosa, Small Steiner triple systems and their properties. Ars Combin. 15, (1983) 3–110.
- [11] T. A. Skolem, Some remarks on the triple systems of Steiner. Mathematica Scandinavia 6, (1958) 273–280.
- [12] N. J. A. Sloane, Number of nonisomorphic Steiner triple systems $S(2, 3, v)$ on $v = 6n + 1$ or $6n + 3$ points. Online Encyclopedia of integer sequences, OEIS - A051391, <https://oeis.org/A051391>.
- [13] D. Stinson, Combinatorial Designs: Constructions and Analysis. Springer, New York, 2004.
- [14] K. Zulauf, Über Tripelsysteme von 13 Elementen. Dissertation Giessen. Wintersche Buchdruckerei, Darmstadt, 1897.

Mateo Hrelja

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, 10000 Zagreb

E-mail address: `mateo.hrelja@unizg.fer.hr`

Anamari Nakić

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, 10000
Zagreb

E-mail address: `anamari.nakic@unizg.fer.hr`